

Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ pourra désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1.1 Définition

DÉFINITION

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si

1. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.
2. $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

Autrement dit, f doit préserver la structure d'espace vectoriel.

Vocabulaire et Notations :

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- On appelle endomorphisme de E , toute application linéaire de E dans E (cas particulier $F = E$).
On note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- On appelle isomorphisme de E sur F toute application linéaire bijective de E dans F
et isomorphisme de E tout endomorphisme bijectif de E .
- Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes, si il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$.

Exemples particuliers

- L'application linéaire nulle notée $0_{\mathcal{L}(E, F)} : E \rightarrow F$
 $\vec{x} \mapsto$
- L'endomorphisme identité $Id_E : E \rightarrow E$, est de plus bijectif, donc est un
 $\vec{x} \mapsto$

Proposition Critère pratique

Soit une application $f : E \rightarrow F$. Alors f est linéaire ssi $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

Exemples :

1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 $M \mapsto M^T$.
2. Soit $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 $P \mapsto P'$

Propriétés fondamentales des applications linéaires :

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
2. $\forall \vec{x} \in E, f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$, et $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$.
3. Plus généralement, l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs de l'espace de départ est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs :
 $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$.

→ preuve

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$: autrement dit soit f et g deux applications linéaires de E dans F . Alors $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$: autrement dit $f + g$ et λf sont encore linéaires de E dans F .

Proposition Composée

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espace vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Si de plus, f et g sont des isomorphismes sur leurs ensembles respectifs, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G . En particulier, la composée de deux isomorphismes de E est un isomorphisme de E .

Proposition : La bijection réciproque d'un isomorphisme de E vers F est un isomorphisme de F vers E . Autrement dit, la réciproque d'une application linéaire bijective est encore linéaire.

DÉFINITION Puissance d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors par convention, on pose $f^0 = id_E$,

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'endomorphisme f^n de E par $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{n \text{ fois}}$.

Remarque : c'est la proposition sur la composée qui garantit que f^n ainsi défini, est un endomorphisme de E .

2 Etude des applications linéaires

2.1 Noyau

DÉFINITION Le noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, noté $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble des antécédents de $\vec{0}$ par f :

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$$

Remarque :

Comme f est linéaire on sait que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ donc $\vec{0}_E \in \text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

→ preuve

Exemple : Déterminer le noyau de l'endomorphisme D de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D : P \mapsto P'$.

2.2 Image

DÉFINITION L'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ noté $Im(f)$ est l'ensemble des images par f des vecteurs de E :

$$Im(f) = f(E) = \{f(\vec{x}), \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F / \exists \vec{x} \in E \text{ tel que } f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Remarque :

Comme $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ on a $\vec{0}_F \in Im(f)$ et $Im(f) \neq \emptyset$.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

→ preuve

Exemple : Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Déterminer son image $Im(f)$.
 $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$

Exercice :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset \text{Ker}(g)$.

On commencera par préciser de quel 0 il s'agit ...

2.3 Isomorphismes

Théorème

→ preuve

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

1. f est injective sur $E \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$
2. f est surjective de E sur $F \Leftrightarrow Im(f) = F$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $M \mapsto AM$.

Vérifier que A est inversible puis montrer que f est injectif.

3 Applications linéaires en dimension finie

Dorénavant E sera de dimension finie.

3.1 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ n vecteurs fixés quelconques de F . Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$, telle que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(\vec{e}_k) = \vec{f}_k$. C'est l'application f qui à tout $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ associe $f(\vec{x}) = x_1\vec{f}_1 + \dots + x_n\vec{f}_n$.

→ idée preuve : il suffit de montrer que l'application définie ci-dessus convient bien ... et est unique.

Remarques : avec les notations du théorème ci-dessus

1. pour définir une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ il suffit de donner les n images d'une base : $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$.
2. pour montrer que deux applications linéaires f et g de E vers F sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur les vecteurs d'une base. Autrement dit, il suffit que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$.

Exemples :

1. Déterminer l'unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f((1, 0)) = (1, 0, 1)$ et $f((0, 1)) = (1, 1, 2)$.
2. Déterminer l'unique application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ / $f(1) = (1, 1, 1), f(X) = (1, 0, 1), f(X^2) = (-1, 0, 2)$.

3.2 Caractérisation de l'image

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))}$.

→ preuve

Remarque : souvent E sera un espace vectoriel de référence, et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de E .

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (x + y, y, x + 2y)$. Donner une base de l'image de f .

→ critère très pratique lorsque f est définie via l'image d'une base, ou lorsque f est surjective ...

Remarque : soit E un ev de dimension finie, F un ev quelconque et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

En effet, si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $\text{Im}(f) =$

3.3 Isomorphismes et bases

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une base finie $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

1. f est injective ssi $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre.
2. f est surjective ssi $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de F .
3. f est bijective ssi $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une base de F .

Autrement dit, une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base est une base.

→ preuve

Exemple : Justifier que l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ définie par $f((1, 0, 0)) = X^2, f((0, 1, 0)) = 1$ et $f((0, 0, 1)) = X$ est un isomorphisme.

3.4 Dimension et isomorphisme

Du théorème précédent, on peut en déduire que si il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$ avec E (ou F) de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

On a de plus :

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Plus précisément, si $\mathcal{B}_E$ est une base fixée de E alors l'application φ qui à $\vec{x} \in E$ associe le n -uplet des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Corollaire

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$

3.5 Théorème du rang et applications

DÉFINITION

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un ev quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle rang de f , et on note $rg(f)$ la dimension de $\text{Im}(f)$: $\boxed{rg(f) = \dim(\text{Im}(f))}$

Remarque

Soit E et F des ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

En effet, si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E , alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ donc $\dim(\text{Im } f) \leq n$.
Et par ailleurs, $\text{Im } f$ est un sev de F , donc $\dim(\text{Im } f) \leq \dim(F)$.

Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$.

→ preuve

Théorème Injection, surjection, rang

Soit E et F deux ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

1. f est injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E)$
2. f est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$

→ preuve

Théorème fondamental!

Soit E et F deux espaces vectoriels de **même** dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective.

En particulier : si E est de dimension finie, un endomorphisme de E est bijectif dès qu'il est injectif OU dès qu'il est surjectif.

→ preuve

Attention, ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie : soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D : P \mapsto P'$.
Montrer que D est surjective. D est-elle injective ?

4 Matrice d'une application linéaire en dimension finie

4.1 Définition

Dans toute cette section, E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E , et $\mathcal{B}_F = (\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ une base de F .

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ définie

$$\text{par } \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_p) \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{\epsilon}_1 \\ \vec{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \vec{\epsilon}_n \end{matrix} \quad \text{où l'on a posé pour tout } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{\epsilon}_i.$$

Lorsque $F = E$ et $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E$, on note la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$.

Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x + z, x - y)$.
Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
 $P \mapsto P'$
3. Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .
Déterminer la matrice de l'application id_E dans la base $\mathcal{B}$.

Comme deux applications linéaires sont égales ssi elles ont même image d'une base, on obtient :

Proposition

Deux applications linéaires de E dans F sont égales ssi elles ont même matrice dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Remarque On vient de voir que toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ en dimension finie peut être représentée par une matrice.

Réciproquement

si on fixe deux espaces vectoriels E et F , de dimension finie p et n et munis d'une base, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être vue comme la matrice d'une application linéaire de E dans F dans ces bases.

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base

canonique est A . Déterminer pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P)$.

On pourra commencer par marquer les "enrobages" de la matrice A (c'est-à-dire les extérieurs).

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application : $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par A dans les bases canoniques.

Exemple : Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

4.2 Matrice de l'image d'un vecteur

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F munis de leur base respective $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

On introduit $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$, $\vec{x} \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$, $\vec{y} \in F$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\vec{y})$

Alors

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\vec{y}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x}) \Leftrightarrow Y = MX$$

4.3 Opérations sur les matrices d'applications linéaires

Théorème

Soit trois ev E , F et G et soit $\mathcal{B}_E$ une base de E , $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G .

Soit maintenant f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$, et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

Si maintenant, g est linéaire de F dans G , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

Remarques :

1. le produit matriciel a justement été défini pour que cette relation soit vraie ...
2. f et g commutent (càd $g \circ f = f \circ g$) ssi leurs matrices respectives commutent.
3. Par itération, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois) a pour matrice associée $(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f))^n$.

Proposition

soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de **même dimension**.

Alors f est un isomorphisme de E sur F ssi sa matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

Le cas échéant, la matrice de l'isomorphisme réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est la matrice M^{-1} : autrement dit, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))^{-1}$

Remarque 1 :

Comme E est de dimension finie : f bijectif ssi f injectif ssi $\text{Ker } f = \{0\}$. On retrouve le résultat du chapitre Matrices à savoir que M est inversible ssi le système $MX = 0$ a pour unique solution $X = 0$.

Remarque 2 :

On peut dorénavant justifier le résultat suivant (chapitre matrices 1ere année) :

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il y a équivalence entre :

1. A est inversible à gauche (autrement dit, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$).
2. A est inversible à droite (autrement dit, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$).
3. A est inversible (autrement dit, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$).

Démonstration

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . Si A est inversible à gauche, alors en notant g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à B , on obtient $g \circ f = \text{id}$.

Donc f est injectif : en effet, soit a, b tels que $f(a) = f(b)$. Alors $g(f(a)) = g(f(b))$ càd $b = a$.

Comme on est en dimension finie, on en déduit que f est bijectif. D'où A inversible.

De même pour l'inversibilité à droite. □

4.4 Rang d'une matrice

DÉFINITION

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de M , noté $rg(M)$, le rang du système $MX = 0_n$.

En pratique : penser aux opérations sur les lignes des matrices, pour échelonner la matrice : le rang de M est alors le nombre de pivots de la matrice échelonnée.

RAPPEL : une matrice M est dite échelonnée si les deux conditions suivantes sont respectées

- si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes sont nulles également
- dans les lignes non-nulles, l'indice de la colonne où se trouve le premier coefficient non-nul croît strictement. Dit autrement, le nombre de 0 en début de ligne croît strictement.

On appelle alors pivot le premier coefficient non-nul de chaque ligne non-nulle.

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de M (vecteurs de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) et on introduit $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ associés à ces colonnes. Alors $rg(M) = rg(C_1, \dots, C_p) = rg(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p)$.

Exemple : déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de plusieurs façons.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et A sa matrice dans des bases fixées de E et F . Alors $rg(f) = rg(A)$.

Démonstration :

Introduire une base de $E : (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Alors on sait que $rg(f) = \dim(\text{Im} f) = \dim(\text{Vect}(\dots)) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = rg(A)$.

Car A étant la matrice associée de f , ses vecteurs colonnes sont les images des vecteurs de la base choisie de E . $\square$

Remarque : On en déduit

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $rg(A) \leq \min(n, p)$ (cf propriété sur $\text{Im}(f)$)
2. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi son rang est $rg(M) = n$.

En effet si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M , alors M est inversible ssi f est bijectif ssi f est surjectif (dimension finie) ssi $rg(f) = n$ ssi $rg(M) = n$.

Théorème admis :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A et A^T ont même rang.

4.5 Noyau et image d'une matrice

DÉFINITION Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors le noyau de A est l'ensemble $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}$.

L'image de A est l'ensemble $\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ telle que } Y = AX\} = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$.

Remarques :

1. En adaptant la preuve concernant $\text{Im}(f)$, on pourrait montrer que $\text{Im}(A) = \text{Vect}(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
2. Si l'on note f l'application linéaire canoniquement associée à A , et $\mathcal{B}_c$ (resp. $\mathcal{B}'_c$) les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, alors $\text{Ker}(A) = \{\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{x}), \vec{x} \in \text{Ker}(f)\}$ et $\text{Im}(A) = \{\text{Mat}_{\mathcal{B}'_c}(\vec{y}), \vec{y} \in \text{Im}(f)\}$.