`Théorème du rang`
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\boxed{\dim(Ker(f)) + rg(f) = \dim(E)}$.

$\longrightarrow$ `preuve`
Posons $p = dim(Kerf)$ et $n = dim(E)$.
Le but est de montrer que l'image de f est de dimension $n-p$.

Version exercice :

Soit une base $(e_1, ..., e_p)$ du noyau de f ; on peut la compléter en une base $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E.
En effet,

Quelle famille pourrait alors être une base de $Im(f)$?

Indication Commencer par trouver une famille génératrice de $Im(f)$ ....

Indication bis : Partir de $Im(f) = Vect(....)$ (cf cours) et réduire la famille génératrice trouvée pour espérer qu'elle soit libre ....

Preuve rédigée :
$ker(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie (puisque E l'est) donc admet des bases. Soit une base $(e_1, ..., e_p)$ du noyau de f. Comme c'est une famille libre de E, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E.

On sait alors que $Im(f) = Vect(f(e_1), ..., f(e_p), f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$ et comme les vecteurs $e_1, ..., e_p$ sont dans le noyau, $Im(f) = Vect(0, ..., 0, f(e_{p+1}), ..., f(e_n)) = Vect(f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$.
Donc la famille $(f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$ est génératrice de l'image de f.

Il reste à montrer qu'elle est libre.
Soit $\lambda_{p+1}, ..\lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda f(e_{p+1}) + ... + \lambda_n f(e_n) = \vec{0}$. Alors par linéarité, $f(\lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n) = 0$. Donc $\lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n \in Ker(f)$ donc il existe des scalaires $\mu_1, ..., \mu_p$ tels que $\lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + ... + \mu_p e_p$, ce qui se réécrit $\mu_1 e_1 + ... + \mu_p e_p - \lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n = \vec{0}$. Or la famille $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ est une base de E donc est une famille libre : on en déduit que $\mu_1 = ... = \mu_p = 0 = \lambda_{p+1} = ... = \lambda_n$.
Conclure.