Diagonalisation

Dans tout ce chapitre, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Changement de bases

1.1 Matrices de passages

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$, $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}', ..., \vec{e_n}')$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice carrée notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{e_1}' & \vec{e_2}' & \cdots & \vec{e_n}' \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array} \quad \text{où l'on a posé pour tout } j \in [\![1, n]\!],\ \vec{e_j}' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e_i}.$$

Autrement dit, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$, ou encore, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(\vec{e_1}', ..., \vec{e_n}')$ (matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.)

Exemples :

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B}'$ la base formée des vecteurs $((2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, -1, 1))$.
   Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. *bonus :* vérifier au préalable que $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Même question avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}'$ la base formée des polynômes $(1, X - 1, (X - 1)^2)$.

`Proposition`
Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice inversible et $\boxed{P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}$.

1.2 Les formules de changement de base

Dans la feuille d'exercices sur les applications linéaires, on a déjà calculé ("à la main") différentes matrices d'un même endomorphisme, en changeant la base de départ ou d'arrivée. En fait, il existe des formules de changement de bases qui permettent d'écrire théoriquement la matrice d'un endomorphisme dans la nouvelle base.
Ces formules proviennent de la définition des produits matriciels donc on ne fera que la preuve de la première formule (calculs fastidieux car il faut tout écrire).

`Proposition`
Soit E un ev de dimension finie, $\vec{x}$ un vecteur de E, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors
$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, Mat_{\mathcal{B}'}(\vec{x})}$ ou encore $Mat_{\mathcal{B}'}(\vec{x}) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\, Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x})$.

Soit maintenant $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. Alors
$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}$, autrement dit $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$

Si la matrice cherchée est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$, il suffit de renverser l'égalité : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Remarque deux matrices de passage interviennent pour le changement de base dans le cas d'un endomorphisme, car il faut changer de base pour les vecteurs de l'espace de départ, et pour les images (dans l'espace d'arrivée), cf exercices.

1.3 Matrices semblables

DÉFINITION Soit A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.
On dit que A et B sont semblables si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

`Proposition`
Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Propriétés des matrices semblables :

— Si A et B sont semblables, alors $rg(A) = rg(B)$.

— Si A et B sont semblables, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.
En effet, si A s'écrit $A = PBP^{-1}$, alors $A^k =$

— La seule matrice semblable à I_n est I_n.
En effet, d'une part, I_n est semblable à I_n (toute matrice est semblable à elle-même en choisissant $P = I_n$).
D'autre part, si A est une matrice semblable à I_n, alors il existe
D'où $A =$

2 Valeurs propres et Espaces propres

2.1 Premières définitions

Exercice préliminaire : Soit $\vec{x} \in E$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow x \in Ker(f - \lambda id)$

DÉFINITION

Soit f un endomorphisme de E.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si il existe $\vec{x} \in E$, $\vec{x}$ non-nul, tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
  $\vec{x}$ est alors appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
- On dit que $\vec{x} \in E$ est un vecteur propre de f, si $\vec{x} \neq \vec{0}$ et si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f, et est noté $Sp(f)$.
- L'ensemble des vecteurs propres de f associé à la valeur propre λ, auquel on ajoute le vecteur nul, est appelé sous-espace propre de f relativement à λ et est noté $E_\lambda(f)$.
  On a donc $E_\lambda(f) = \{\vec{x} \in E \,/\, f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = Ker(f - \lambda id_E)$.

Remarque importante :
Soit λ une valeur propre de f. Alors, en tant que noyau d'une application linéaire,
$\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$. De plus, $\boxed{dim(E_\lambda(f)) \geq 1}$.
En effet, il existe un vecteur $\vec{x}$ non-nul de E tel que $\vec{x} \in E$. D'où $E_\lambda \neq \{0\}$: on a même $Vect(\vec{x}) \subset E_\lambda$.

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$.
  X est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A, si $X \neq 0$ et si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A, et est noté $Sp(A)$.
- Pour λ valeur propre de A, on appelle sous-espace propre de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = \lambda X$. Il est noté $E_\lambda(A)$.
  On a donc $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,/\, AX = \lambda X\} = Ker(A - \lambda I_n)$.
  C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de dimension supérieure ou égale à 1.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

- λ est une valeur propre de f ssi λ est une valeur propre de A : $\boxed{Sp(f) = Sp(A)}$.
- $\boxed{\vec{x} \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda \text{ ssi la matrice colonne } X = Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda.}$
  Plus précisément, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(A) = \{Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}), \vec{x} \in E_\lambda(f)\}$.
  En particulier, pour toute valeur propre λ de f (ou de A), $\boxed{dim(E_\lambda(f)) = dim(E_\lambda(A))}$.

$\longrightarrow$ preuve

2.2 Méthode pratique de recherche de valeurs propres en dimension finie

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\boxed{n = dim(E)}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sa matrice associée dans une base de E.

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } f \quad & \Longleftrightarrow \exists \vec{x} \in E - \{0_E\} \text{ tel que } f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \\
& \Longleftrightarrow ker(f - \lambda id_E) \neq \{\vec{0}_E\} \\
& \Longleftrightarrow rg(f - \lambda id_E) < n \\
& \Longleftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n \\
& \Longleftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\
& \Longleftrightarrow \text{le système } AX = \lambda X\text{, d'inconnue } X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ n'est pas de Cramer} \\
& \Longleftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \text{ tel que } AX = \lambda X \\
& \Longleftrightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } A
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ preuve

Le théorème du rang appliqué à $f - \lambda id$ donne la relation : $\boxed{dim(E_\lambda(f)) = n - rg(f - \lambda id) = n - rg(A - \lambda I)}$ (un endomomorphisme et sa matrice ont même rang).
On en déduit donc : $\boxed{dim(E_\lambda(A)) = n - rg(A - \lambda I)}$.

Remarque importante : si on s'intéresse aux valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, seule la fin du cadre sera utile :

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } A \Longleftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \text{ tel que } AX = \lambda X \Longleftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \Longleftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n}$$

Cas particulier de la valeur propre 0

$\boxed{\begin{array}{l} 0 \text{ valeur propre de } f \iff f \text{ non injectif} \iff rg(f) < n \iff rg(A) < n \iff A \text{ non inversible} \iff 0 \text{ valeur propre de } A. \\ \text{De plus, } E_0(f) = Ker(f),\ E_0(A) = Ker(A) \text{ et } dim(E_0(f)) = n - rg(f) = n - rg(A) = dim(E_0(A)). \end{array}}$

Cas particulier des matrices 2×2 : $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff det(A - \lambda I_2) = 0}$.

Cas particulier des matrices triangulaires :

$\boxed{\text{Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux}}$.

$\longrightarrow$ pour le voir, il suffit de regarder $A - \lambda I_n$ avec A triangulaire supérieure (par exemple). C'est une matrice triangulaire, donc elle n'est pas inversible ssi au moins l'un des coefficients diagonaux est nul ....

Exemple 1 : Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 2 :
Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (x + y, 2x + 2y)$.
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f. On proposera plusieurs méthodes.

2.3 Méthode guidée de recherche de valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la relation $A^3 + A^2 - 2A = 0 \quad (*)$.

Remarque : en posant $P(X) = X^3 + X^2 - 2X$, on remarque donc que $P(A) = 0$.
La notion de polynôme annulateur (d'une matrice ou d'un endomorphisme) n'est pas à votre programme donc cette méthode sera toujours guidée dans le cas d'une telle relation $(*)$.

1. Montrer que $\boxed{\text{si}}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, $\boxed{\text{alors}}$ λ est racine de P.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

$\boxed{\text{Attention}}$, toutes les racines de P ne sont pas nécessairement valeurs propres, donc il faudra encore vérifier "à la main" (en trouvant au moins un vecteur propre) qu'elles le sont effectivement (ou non).
En effet, soit A une matrice vérifiant la relation $A^2 + A - 2I = 0$.
Alors A vérifie également $(*)$ car $A \times (A^2 + A - 2I) = A \times 0$ donc $A^3 + A^2 - 2A = 0$.
Donc (d'après la question 1.) les valeurs propres de A sont à chercher parmi $\{0,1,-2\}$.
Mais si on avait utilisé le polynôme $Q(X) = X^2 + X - 2$, en reprenant le raisonnement de la question 1, on aurait pu obtenir que les valeurs propres de A étaient à chercher parmi les racines de Q c'est-à-dire dans $\{1, -2\}$.
Donc 0 ne sera pas valeur propre.
<u>Conclusion :</u> comme la relation qu'on vous propose n'est pas toujours la meilleure (autrement dit le polynôme annulateur n'est pas toujours de degré minimal), les racines du polynôme ne seront pas toujours des valeurs propres.

2.4 Propriétés fondamentales des espaces propres

`Théorème`
Soit λ_1, ... λ_p des valeurs propres <u>distinctes</u> de f et $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_p$ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Alors la famille $(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_p)$ est $\boxed{\text{libre}}$.

$\longrightarrow$ `preuve: commencer par faire la preuve dans le cas` $p = 2$
`puis procéder par récurrence sur` $p \in \mathbb{N}^*$.

Si E est de dimension n, toute famille libre a un cardinal inférieur ou égal à n, d'où le corollaire suivant :
`Corollaire`
Un endomorphisme f de E de dimension n admet $\boxed{\text{au plus } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet $\boxed{\text{au plus } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

Plus généralement,
`Théorème`
Soit λ_1, ...,λ_p des valeurs propres <u>distinctes</u> de f et $\mathcal{B}_1$, ... ,$\mathcal{B}_p$ des bases des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
Alors $\boxed{\text{la famille obtenue par juxtaposition des bases}}$, càd la famille $(\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p)$, est $\boxed{\text{libre}}$.

`Corollaire`
La somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme en dimension n est inférieure ou égale à n :
$\boxed{\sum_{\lambda \in Sp(f)} dim(E_\lambda(f)) \leq n}$. De même dans le cas des matrices : $\boxed{\sum_{\lambda \in Sp(A)} dim(E_\lambda(A)) \leq n}$.

3 Diagonalisation en dimension finie

Dans toute cette section, E est un espace vectoriel de dimension finie.

3.1 Définitions

DÉFINITION

Un endomorphisme f de E est diagonalisable si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.
Diagonaliser f c'est déterminer une telle base de E.

$\longrightarrow$ dans une telle base, la matrice de f est et ses coefficients diagonaux sont
En effet, soit $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$ une base de vecteurs propres de f. Alors la matrice de f dans cette base est :

DÉFINITION

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
Diagonaliser A c'est déterminer des matrices D et P qui vérifient les conditions ci-dessus.

`Théorème`

Soit f un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Alors f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

$\longrightarrow$ `preuve`

On peut en déduire :

A est diagonalisable ssi il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.
De plus lorsque A est diagonalisable, en posant D une matrice diagonale constituée des valeurs propres de A, et P une matrice de passage (associée à D) de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vers une base de vecteurs propres de A, on a $A = PDP^{-1}$.

Attention, il n'y a pas unicité de D (ordre des valeurs propres ...) ni de P (infinité de vecteurs propres...).

`Théorème Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité`

Un endomorphisme en dimension n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.
Autrement dit f est diagonalisable si et seulement si $\sum\limits_{\lambda \in Sp(f)} dim(E_\lambda(f)) = n$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} dim(E_\lambda(A)) = n$.

`Démonstration du sens réciproque pour` f

Supposons $\sum\limits_{\lambda \in Sp(f)} dim(E_\lambda(f)) = n$. Alors en concaténant les bases de chaque sous-espace propre, on obtient une famille de cardinal n, qui est de plus libre d'après la section précédente. Elle forme donc une base de E et elle est constituée de vecteurs propres de f (par construction). Donc f est diagonalisable.

3.2 Une condition suffisante

Un sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 1. Si on suppose de plus que f admet n valeurs propres distinctes λ_1, ... λ_n, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$. Comme par ailleurs, on sait $\sum\limits_{i=1}^{n} dim(E_{\lambda_i}(f)) \leq n$, on en déduit dans ce cas que $\sum\limits_{i=1}^{n} dim(E_{\lambda_i}(f)) = n$. Donc f est diagonalisable et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $dim(E_{\lambda_i}) = 1$.

`Théorème`

Soit f un endomorphisme en dimension n admettant n valeurs propres distinctes.
Alors f est diagonalisable, et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ possédant n valeurs propres distinctes.
Alors A est diagonalisable, et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

Exemple : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis la diagonaliser. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.3 Théorème spectral, première version (incomplète)

`Théorème` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique <u>réelle</u>. Alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.