

DÉFINITION Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont semblables si il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .

**Proposition**

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

*preuve.* Soit  $A$  et  $B$  deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes : il existe donc  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telles que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ .

Si on note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , les formules de changement de base (vues dans la section précédente) donnent :  $A = PBP^{-1}$ .

Les matrices  $A$  et  $B$  sont donc semblables.

Réciproquement supposons que les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables : il existe donc une matrice inversible  $P$  telle que  $A = PBP^{-1}$ .

Notons également  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$  (c'est-à-dire tel que  $A$  soit la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ).

Il reste à trouver une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $f$  sera  $B$ .

Regardons maintenant  $P$  comme une matrice de passage : plus précisément, on introduit les vecteurs  $e_i$  de  $\mathbb{K}^n$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la matrice de coordonnées de  $e_i$  dans la base canonique soit la  $i^e$  colonne de  $P$ .

Comme  $P$  est inversible,  $rg(P) = n$  donc  $n = rg(e_1, \dots, e_n)$  donc la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre. Comme elle est de cardinal  $n = \dim(\mathbb{K}^n)$  ; c'est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Donc  $P$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}_c$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Enfin, comme par hypothèse  $B = P^{-1}AP$ , on en déduit  $B = P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c}$ .  
Les formules de changement de base permettent alors de conclure que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .