Espaces Probabilisés infinis

RAPPELS de première année :

L'univers est $\Omega = \{$issues ou résultats possibles de l'expérience aléatoire$\}$

Un événement A est une partie de Ω, autrement dit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Opérations possibles sur les événements : $\bar{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\underset{i=1}{\overset{n}{\cup}} A_i$, $\underset{i=1}{\overset{n}{\cap}} A_i$ (réunion et intersection finies)

Deux événements A et B sont dit incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \varnothing$.

Une famille finie d'événements $(A_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements (s.c.e.) si pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (les événements sont incompatibles 2 à 2) et si $\underset{i=1}{\overset{n}{\cup}} A_i = \Omega$

P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ et vérifie

(a) $P(\Omega) = 1$

(b) pour tous A et B événements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple : une urne contient 1 boules blanche et 1 boule noire.
On effectue deux tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne. Alors $\Omega =$
Posons A l'événement "obtenir exactement une boule blanche". Alors $A = \{ \qquad \}$.
Souvent, plutôt que d'écrire A comme une partie de Ω, on l'écrira en fonction d'événements élémentaires : on pose pour tout $i \in [\![1,2]\!]$, B_i "le i^e tirage donne une boule blanche".
Alors $A =$

En première année, toutes les expériences étudiées étaient finies : on lance n fois une pièce, ou on fait n tirages successifs d'une boule etc. On veut maintenant étudier des situations du type : on lance la pièce jusqu'à obtenir pile, et on compte le nombre de lancers nécessaires. Ce nombre aléatoire peut être très grand voire éventuellement infini. Donc l'univers Ω pourra être infini.
Exemple : On lance une infinité de fois une pièce. Alors $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$.
Une issue $\omega \in \Omega$ est une suite de P et F, qui représente la liste des résultats obtenus aux lancers.

Avant de généraliser l'espace probabilisé, il faut définir deux notations :

Définition

Soit E un ensemble, et (A_n) une suite de parties de E.

On note $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\cap}} A_n$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans toutes les parties A_n.

Autrement dit : $x \in \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\cap}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n$.

On note $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\cup}} A_n$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans (au moins) une des parties A_n.

Autrement dit : $x \in \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\cup}} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n$.

1 Généralisation de l'espace probabilisé

Quand Ω est de taille infinie, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ devient trop grand.
On va donc $\boxed{\text{restreindre l'ensemble des événements à une partie } \mathcal{F} \text{ de } \mathcal{P}(\Omega)}$ qui vérifiera certaines propriétés.

Définition

Une tribu $\mathcal{F}$ (ou $\sigma-$algèbre) de Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{F}$, $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
   En particulier, on déduit du 1. : $\varnothing \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ est stable par réunion finie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, alors $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$. Et plus généralement,

   $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable : pour toute famille $(A_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathcal{F}$ alors $\displaystyle\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

   Par passage au complémentaire, on en déduit :

   $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$. Et plus généralement,

   $\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable : pour toute famille $(A_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathcal{F}$, $\displaystyle\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Remarque
Toutes les opérations sur les événements que l'on faisait dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec Ω fini, restent donc possibles dans le cas plus général de $(\Omega, \mathcal{F})$ avec Ω infini, $\boxed{\text{mais}}$ en plus les opérations $\bigcap\limits_{n=}^{+\infty}$ et $\bigcup\limits_{n=}^{+\infty}$ sont permises.

Généralisation immédiate de la notion de système complet d'événements
Une famille d'événements $(A_n)_{n \geq n_0}$ est un **système complet d'événements** (abrégé s.c.e.) si :

1. pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (les événements sont deux à deux incompatibles)
2. $\bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} A_i = \Omega$

Exemple : On lance une infinité de fois une pièce. On introduit les événements P_∞ "n'obtenir que des piles" et pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n "obtenir exactement n piles".
Alors $(P_\infty, P_0, P_1, ..., P_n, ...)$ est un système complet d'événements.

Généralisation de la notion de probabilité :
DÉFINITION

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute application $P : \mathcal{F} \to [0; 1]$ vérifiant

1. $P(\Omega) = 1$
2. P est $\sigma-$additive : pour toute famille $(A_n)_{n \geq n_0}$ d'événements 2 à 2 incompatibles, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} P(A_n)$ converge et $P(\bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} A_n) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé espace probabilisé (infini).
Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit négligeable si $P(A) = 0$ et presque sûr si $P(A) = 1$.

$\longrightarrow$ toutes les propriétés de P vues dans le cas Ω fini restent vraies, en particulier la formule du crible.

Exercice 1 :
On effectue une infinité de lancers de dés et on introduit les événements C_n "on obtient le premier 6 au n^{ie} lancer". Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(C_n)$.
En déduire la probabilité de l'événement C "on obtient au moins un 6 au cours de l'expérience". Interpréter.

La propriété de $\sigma-$additivité permet également d'obtenir :
`Proposition`
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geq n_0}$ un système complet d'événements.
Alors $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n \geq n_0} P(A_n) \text{ converge et } \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) = 1}$.

Exercice 2 : On effectue une infinité de lancers d'une pièce truquée où $p \in]0, 1[$ est la probabilité d'avoir pile. On introduit B "n'avoir aucun pile lors de l'expérience" ainsi que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n"ne pas avoir de pile au cours des n premiers lancers".
Déterminer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P(B) \leq P(A_n)$.
Que peut-on en déduire pour $P(B)$?

`Remarque fondamentale :`
On vient de construire un événement non vide B mais négligeable pour P.
$\longrightarrow$ ne pas confondre "événement impossible" et "événement de probabilité nulle".

2 Probabilités conditionnelles et indépendance : généralisations

`Théorème-définition`
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fini ou infini et A un événement de probabilité non-nulle. Alors l'application P_A définie sur $\mathcal{F}$ par $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{A}}$ est une probabilité sur $\mathcal{A}$ appelée probabilité sachant A (ou probabilité conditionnelle relative à A.)
$P_A(B)$ est aussi noté $P(B/A)$.

On en déduit en particulier que pour tout événement A de probabilité non-nulle : $\boxed{P(A\cap B)=P(A)P_A(B)}$.

Remarque
$\boxed{\text{Si } P(A)=0, \text{ on convient de poser } P(A)P_A(B)=0}$ donc le cadre ci-dessus est vrai pour tout événement A.

`Formule des probabilités composées` :
Soient $A_1,..,A_n$ une famille d'événements de $\mathcal{F}$. Alors on a :

$$\boxed{P(A_1\cap A_2\cap..\cap A_n)=P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1\cap A_2}(A_3)\,...\,P_{A_1\cap A_2\cap..\cap A_{n-1}}(A_n).}$$

Généralisation de la `formule des probabilités totales` :
`Théorème`
Soit $(A_n)_{n\geq n_0}$ un système complet d'événements infini.
Alors pour tout événement B, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq n_0} P(B\cap A_n) \text{ converge et } P(B)=\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}P(B\cap A_n)=\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}P_{A_n}(B)P(A_n)}$.

$\longrightarrow$ `preuve`

Remarque
Une famille d'événements $(A_n)_{n\geq n_0}$ est un **système quasi complet d'événements** si :

1. les événements de la famille sont deux à deux incompatibles
2. $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}P(A_n)=1$. (autrement dit, $\bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty}A_n$ est égal à Ω à un ensemble négligeable près)

La formule des probabilités totales énoncée ci-dessus reste vraie dans le cas où le système d'événements est quasi-complet.

Généralisation de la `formule de Bayes` :
`Théorème`

1. Soit A et B deux événements de probabilité non nulle ; alors $\boxed{P_B(A)=P_A(B)\dfrac{P(A)}{P(B)}}$
2. Soit $(A_j)_{j\geq n_0}$ un système complet d'événements alors $\forall k\in\{1;..;n\}$ on a $P_B(A_k)=\dfrac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}P(A_n)P_{A_n}(B)}$

Généralisation de l'indépendance mutuelle à une suite infinie d'événements :
DÉFINITION
Les événements A et B sont indépendant pour la probabilité P si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Les événements $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si :
pour tout ensemble d'indices $I\subset[\![1,n]\!]$, on a : $P(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\prod\limits_{i\in I}P(A_i)$.
En particulier avec $I=[\![1,n]\!]$ on a $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$.

Les événements $(A_n)_{n\geq n_0}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si :
pour tout ensemble d'indices **fini** $I\subset\mathbb{N}$, on a : $P(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\prod\limits_{i\in I}P(A_i)$

Exemple :
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
1. A : tirer un roi ; B : tirer un rouge. 2. A : tirer une dame ; B : tirer une figure.

3 Généralités sur les variables aléatoires réelles

3.1 Définitions

Maintenant que Ω peut être de taille infinie, il faut rajouter une condition pour avoir une variable aléatoire réelle :
DÉFINITION
Une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{F})$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel a, l'ensemble $\{\omega\in\Omega|X(\omega)\leq a\}$, noté $(X=a)$ soit un événement.

$\longrightarrow$ Pourquoi cette condition ? Le but est de calculer des probabilités. Or une probabilité n'est définie que sur des événements. Il faut donc s'assurer que ce que l'on étudie ($(X \leq x)$, ou $(X = x)$, ou $(X \in I)$...) soit un événement.

Rappel des notations en usage :
$X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est l'ensemble des issues de Ω pour lesquelles X prend la valeur x.
Pour J une partie de $\mathbb{R}$, $(X \in J) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in J\}$ etc.

Remarque

1. On dit que X est une variable aléatoire **finie** si $X(\Omega)$ est fini (cas étudié jusqu'à présent).
2. On dit que X est une variable aléatoire **discrète** si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable, c'est-à-dire qui peut s'écrire sous la forme $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ avec I une partie de $\mathbb{N}$.
   Les variables aléatoires discrètes feront l'objet du prochain chapitre.
3. Si $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à des points, on dit que X est une variable **à densité**. Ces variables aléatoires seront introduites en fin d'année.

Exemples :

1. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.
   Alors $X(\Omega) =$ donc X est
2. Soit Y, la durée de vie d'une ampoule : $Y(\Omega) =$ et Y est

3.2 Indépendances de variables aléatoires réelles

Dans cette section, toutes les variables seront définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Deux variables X et Y sont indépendantes si pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$,
   $P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)P(Y \in J)$.
2. $(X_1, .., X_n)$ est une famille de variables mutuellement indépendantes si pour toute famille $(I_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, $P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \in I_k)) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(X_k \in I_k)$.
3. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes si pour toute famille <u>finie</u> d'indices $I \subset \mathbb{N}$, $(X_k)_{k \in I}$ est une famille de variables mutuellement indépendantes.

3.3 Fonction de répartition d'une variable réelle

DÉFINITION
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On appelle fonction de répartition de X la fonction réelle F_X définie par $\boxed{\begin{array}{llll} F_X : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & P(X \leqslant t) \end{array}}$

`Proposition`
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et F_X sa fonction de répartition. Alors

i) $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0, 1]$
ii) F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
iii) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

`Fonction de répartition et événements liés à X`

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $P(X \leq a) = F_X(a)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
3. Plus généralement, pour tout $a < b$, $\boxed{P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)}$.

$\longrightarrow$ en effet, $(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$ réunion de deux événements incompatibles,
donc $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$.

En fait, une variable aléatoire discrète ne s'étudie pas du tout comme une variable à densité, et les fonctions de répartitions ne se ressemblent pas (en dehors des propriétés ci-dessus) c'est pourquoi, on ne dira rien de plus dans le cas général.