

Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La transposée d'une matrice A sera notée A^T .

1 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

1.1 Produit scalaire

DÉFINITION

Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On appelle produit de scalaire de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ le réel noté $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ défini par : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Remarque :

En notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $X^T Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Donc : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^T Y$.

D'ailleurs par extension, la notation $\langle X, Y \rangle$ est parfois utilisée.

Exemple 1 : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle =$

Exemple 2 : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x, \vec{e}_i \rangle =$

On en déduit que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle x, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$.

Propriétés : Soit $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Bilinéarité :** le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite.
 $\langle \lambda \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ et $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} + \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$.
- **Symétrie :** $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.
- **Positivité :** $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$.
- **Définie - Positivité :** $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$. → preuve

1.2 Norme euclidienne

DÉFINITION

Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle norme de $\vec{x}$ le réel noté $\|\vec{x}\|$ défini par : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Exemple : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|\vec{e}_i\| =$

Propriétés : Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\vec{x}\| \geq 0$
- $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ → preuve
- $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.

Exemple : Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ non-nul. Montrer que $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ est de norme 1.

Exercice : Montrer que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Théorème Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ et il y a égalité si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

Remarque : avec $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$

Théorème Inégalité triangulaire

Pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Il y a égalité si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont positivement liés c'est-à-dire colinéaires et de même sens.

→ preuve

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux lorsque $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. On note alors : $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Exemples :

1. Le vecteur nul est orthogonal à
Montrons que c'est le seul : soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors en particulier, il est orthogonal à
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux à $\vec{n} = (1, 2)$. Représenter graphiquement cet ensemble.
3. Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à $\vec{a} = (1, -1, -1)$.

Par extension,

DÉFINITION

Deux matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont dites orthogonales si $X^T Y = 0$.

Théorème de Pythagore

Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

→ preuve

Proposition

Une famille de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux est libre.

→ preuve

2.2 Bases orthonormales

DÉFINITION Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$ lorsque les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont deux à deux orthogonaux.
- $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ lorsque les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.
- $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ lorsque $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1.
- Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on dit que $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de F si $\mathcal{F}$ est une base de F constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1.

Par extension, on pourra utiliser ce vocabulaire pour des familles de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

Exercice important : Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Théorème admis

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ non réduit au vecteur nul admet au moins une base orthonormale.

→ en fait il existe un procédé (hors-programme) pour orthonormaliser une base.

Le théorème de la base incomplète permet alors d'obtenir que toute famille libre orthonormale de $\mathbb{R}^n$ peut se compléter en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Ecriture d'un vecteur dans une base :

1. Soit $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Alors tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit : $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$.

2. Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ non réduit au vecteur nul et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une base orthonormale de F .

Alors tout vecteur $\vec{x} \in F$ s'écrit $\vec{x} = \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i$.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: on pose $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ et $\vec{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}, 1)$.

Montrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et déterminer les coordonnées de $\vec{x} = (1, 1)$ dans cette base.

→ preuve du 1.

Rappel : soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$, et $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ écrits dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (base orthonormale). Alors par définition, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$.

Proposition

Soit $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}_i$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y'_i \vec{e}_i$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ écrits dans cette base. Alors $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x'_i y'_i = X'^T Y'$ où $X' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\vec{x})$ et $Y' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\vec{y})$.

Autrement dit, l'expression du produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormale dans laquelle on écrit les vecteurs.

→ preuve

*Exercice ** : soit $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{C}$. Montrer que $P^T P = I_n$. Autrement dit $P^{-1} = P^T$.

3 Projection orthogonale

3.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

DÉFINITION

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'orthogonal de F , noté $F^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F : $F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / \forall \vec{y} \in F, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}$.

Exemples :

1. Lorsque $F = \mathbb{R}^n$, $F^\perp =$ et lorsque $F = \{\vec{0}\}$, $F^\perp =$
2. $F \cap F^\perp =$
3. Dans $\mathbb{R}^2$, posons $F = \text{Vect}((1, 0))$. Alors $F^\perp =$

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

→ preuve

Théorème Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une famille génératrice de F .

Alors $\vec{x} \in F^\perp \Leftrightarrow \forall k \in [1, p], \langle \vec{x}, \vec{f}_k \rangle = 0$.

→ preuve

Exercice : Soit $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. On fixe $k \in [1, n]$, et on pose $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$.

1. Montrer que $F^\perp = \text{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n)$.
2. Qu'en déduit-on sur la dimension de $F^\perp$?
3. Justifier que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(\vec{x}_F, \vec{x}_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_{F^\perp}$.

Proposition

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ non réduit au vecteur nul, et $F^\perp$ son orthogonal.

Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - \dim(F)$.

De plus, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(\vec{x}_F, \vec{x}_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_{F^\perp}$.

→ preuve

3.2 Projection orthogonale

DÉFINITION

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. On appelle projection orthogonale sur F l'application p_F définie par $p_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_{F^\perp} \mapsto \vec{x}_F$

Le vecteur $p_F(\vec{x})$ est appelé projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F .

Exemple 1 : Soit $F = \text{Vect}((1, 1)) \subset \mathbb{R}^2$.

Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur F . On pourra commencer par déterminer $F^\perp$, puis trouver les coordonnées de tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ dans une base judicieuse de $\mathbb{R}^2$.

Propriétés : Avec les notations de la définition, on a

- pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} p_F(\vec{x}) \in F \\ \vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^\perp \end{cases}$ et $p_F(\vec{x})$ est l'unique vecteur vérifiant ces 2 conditions.
- p_F est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$
- $\forall \vec{a} \in F, p_F(\vec{a}) = \vec{a}$ et $\forall \vec{a} \in F^\perp, p_F(\vec{a}) = 0$.
Plus précisément : $p_F \circ p_F = p_F \quad \text{Im}(p_F) = F \quad \text{Ker}(p_F) = F^\perp$

→ preuve

Exemple 2 : Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$.

Théorème admis Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$.

La projection orthogonale sur F est l'unique endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$, $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = F^\perp$.

Remarque : Le théorème du rang permet de retrouver que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

Proposition

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de F . Alors pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $p_F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$.

→ preuve

→ Reprendre alors les exemples 1. et 2. précédents et en donner une nouvelle méthode.

3.3 Distance

DÉFINITION distance entre deux vecteurs

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ le réel $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

DÉFINITION distance d'un vecteur à une partie non vide

Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et A une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. On appelle distance entre $\vec{x}$ et A le réel $d(\vec{x}, A) = \inf_{\vec{y} \in A} \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Proposition

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$, p_F la projection orthogonale sur F , et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Alors pour tout $\vec{y} \in F$, $\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$ et donc $d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$.

→ preuve

Remarque : dans la preuve, on a montré que si $\vec{y} \neq p_F(\vec{x})$, alors $\|\vec{x} - \vec{y}\| > \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$. Autrement dit, lorsque F est un sev de $\mathbb{R}^n$, la distance de F à $\vec{x}$ est atteinte en un unique point.

4 Théorème spectral

Proposition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, et soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes. Alors X et Y sont orthogonaux : autrement dit $X^T Y = 0$.

→ preuve

Théorème spectral : admis

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A : autrement dit, A est diagonalisable dans une base orthonormale.

Il existe donc une matrice D diagonale, et une matrice P inversible vérifiant $P^T = P^{-1}$, telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

→ la propriété sur P découle du fait que P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales (cf exercice section 2.2)

Remarque : Les bases de diagonalisation de A ne sont pas toutes orthonormales.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormée, et déterminer une matrice D diagonale, et une matrice P inversible telles que $A = PDP^T$.