Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels : quelques rappels

Dans un espace vectoriel E, deux opérations sont possibles :

$$\begin{array}{rlcrl} + : & E \times E \to E & \quad\text{et}\quad & \cdot : & \mathbb{K} \times E \to E \\ & (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + \vec{y} & & & (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda \cdot \vec{x}. \end{array}$$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

$\longrightarrow$ Interprétation graphique dans le plan $\mathbb{R}^2$

Exemples classiques d'espaces vectoriels :

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ des matrices de taille n et p à coefficients dans $\mathbb{K}$, pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
- Les ensembles de polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ (resp. continues) $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$ (resp. $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$)...

Propriétés : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, on a

1. $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$ et $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$
2. $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E \iff \lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$

   On en déduit que : $\lambda\vec{x} = \mu\vec{x} \iff \lambda = \mu$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$ et $\lambda\vec{x} = \lambda\vec{y} \iff \lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{y}$

DÉFINITION

Soit une famille finie de E : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est appelé **combinaison linéaire** de cette famille s'il existe n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{e}_k$.

Exercice : Montrer que $(2, -3)$ est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(1, 1)$ (graphiquement et par le calcul).

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Cas général

DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est un sous-espace vectoriel (sev) de E lorsque :

1. F est un sous-ensemble de E : $F \subset E$
2. F n'est pas vide : $F \neq \varnothing$
3. F est stable par somme de vecteurs et par multiplication par un scalaire :

   (a) $\forall(\vec{x}, \vec{y})^2 \in F^2,\ \vec{x} + \vec{y} \in F$ et (b) $\forall\vec{x} \in F,\ \forall\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \vec{x} \in F$.

Autrement dit lorsque :

1. $F \subset E$
2. $F \neq \varnothing$
3. F est stable par combinaison linéaire : $\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2,\ \forall\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$

Remarque importante :

La condition $F \neq \varnothing$ s'argumente en général par $\vec{0}_E \in F$ car si $\vec{0}_E \notin F$, F ne peut pas être un sev de E.

En effet, soit F un sev : comme il est non vide, on dispose de $\vec{x} \in F$.

Alors par stabilité de F, on sait que $(-1) \cdot \vec{x} + \vec{x} \in F$ d'où $\boxed{\vec{0_E} \in F}$.

`Proposition admise`

Soit $(E, +\cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E. Montrer que $F \cap G$ est encore un sev de E.

Exercice 2 : Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x\}$.
Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^2$ mais que $F \cup G$ n'en est pas un.

`Proposition`
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit F_1, F_2, ..., F_n n sous-espaces vectoriels de E.
Alors $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille finie de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de E.
`Définition - Théorème`

On note $Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \{\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n,\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$.
Alors $Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est un sev de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$.

$\longrightarrow$ `preuve`

`A retenir`

• $\vec{x} \in Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ssi $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$.
En particulier, $Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ contient les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$.
• $Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est le plus *petit* sev contenant les vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.
Autrement dit, si G est un sous-espace vectoriel de E contenant $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, alors $Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \subset G$, puisque G en tant que sev est stable par combinaisons linéaires.

$\longrightarrow$ 2 méthodes pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E : soit utiliser la définition avec les 3 points, soit écrire F sous la forme $F = Vect(...)$.

3 Base d'un espace vectoriel

3.1 Famille génératrice

Définition

Une famille finie de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est dite génératrice de E lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$: $\forall \vec{x} \in E,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{x} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p$.

Autrement dit, lorsque $E = Vect(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_p)$

Exemple : Montrer que la famille $(1, 0), (0, 1)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Propriétés :

- Par définition, toute famille $\vec{u_1}, .., \vec{u_p}$ est génératrice du sous-espace vectoriel $Vect(\vec{u_1}, .., \vec{u_p})$
- Toute famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E.
  Exemple : la famille $(1, 0),\ (0, 1),\ (1, 1)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
  Remarquer qu'un même vecteur peut s'écrire de plusieurs de façons différentes :
  $(3, 2) = 2(1, 0) + (0, 1) + (1, 1) = (1, 0) + 2(1, 1) = -(0, 1) + 3(1, 1)$...
- Opérations sur Vect qui transforment une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice :
  — enlever le vecteur nul (si la famille en contient un !), ou un vecteur redondant, ou un vecteur qui s'écrit comme une CL des autres vecteurs
  — permuter les vecteurs
  — multiplier un vecteur par un scalaire non nul
  — substituer à un vecteur une combinaison linéaire de ce vecteur et des autres vecteurs de la famille

Exemple 1 :
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\{(1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, 3)\}$. Montrer que $E = \mathbb{R}^2$.
Exemple 2 :
Montrer que $Vect(X, X + 1, 1 + X + X^2)$=$\mathbb{R}_2[X]$.

Attention ! ne pas confondre la famille avec le sous-espace vectoriel engendré par la famille !
Suite aux opérations précédentes, les familles sont modifiées, mais les sous-espaces engendrés par ces familles restent les mêmes. D'où l'égalité sur les Vect, et non sur les familles directement.

3.2 Famille libre

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de E.
Le vecteur nul s'écrit toujours comme une combinaison linéaire de cette famille (décomposition dite triviale) :
$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_p.$$

Définition

La famille finie $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est dite libre lorsque la seule combinaison linéaire de $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ donnant le vecteur nul est celle où tous les coefficients sont nuls :
pour tout $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on a : $\qquad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre, est dite **liée** .

Exemple : Montrer que la famille $(X, X^2 - X, X^3 - X^2 + X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est libre.

`Proposition`
Soit $(P_1, P_2, ..., P_n)$ une famille finie de polynômes non-nuls de $\mathbb{K}[X]$ dont les degrés sont 2 à 2 distincts.
Alors la famille $(P_1, P_2, ..., P_n)$ est libre.

$\longrightarrow$ preuve : quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que $0 \leq deg(P_1) < deg(P_2) < ... < deg(P_n)$.
Raisonnons maintenant par l'absurde :

Par définition,

la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est **liée** lorsqu'il existe p scalaires non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p$ tels que $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$.

On en déduit que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est liée ssi l'un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres autrement dit, ssi $\exists k \in [\![1, p]\!]$, $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, ...\lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tel que $\vec{v_k} = \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{p} \lambda_j \vec{v_j}$.

Cas simples de familles libres /liées :
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée. Toute famille contenant deux vecteurs identiques est liée.
- Une famille de **un** vecteur est libre ssi le vecteur est non-nul.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une famille de **deux** vecteurs est libre ssi les deux vecteurs sont non colinéaires.
  Attention : cette dernière propriété devient fausse si la famille contient plus de 2 vecteurs !
  Rappel : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{u} = a\vec{v}$ ou $\vec{v} = a\vec{u}$

$\longrightarrow$ `preuve`

Propriété 1 : l'écriture de tout vecteur dans une famille libre est unique.
Autrement dit, si $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$ est une famille libre de E, et si $\vec{x} \in Vect((\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$, alors il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{e_k}$.
$\longrightarrow$ `preuve`

Propriété 2 :
Soit $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$ une famille libre, et soit $\vec{f} \notin Vect((\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$. Alors la famille $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_p}, f)$ est encore libre.
$\longrightarrow$ `preuve`

3.3 Base

Définition Une famille finie de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

`Proposition`

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E $\quad$ ssi $\quad \forall\vec{x} \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$.
(tout $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière unique en fonction des $\vec{e_i}$)

Ce n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ représente les **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_E}(\vec{x}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array}$ est appelée matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Remarque : L'*existence* d'une telle écriture est garantie par le caractère générateur de la famille, et l'unicité par le caractère libre de la famille.

Exemples :
1. Trouver une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$.

2. Montrer que la famille $\{1, X-1, (X-1)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer alors les coordonnées de X^2 dans cette base.

$\longrightarrow$ **Base canonique des espaces-vectoriels de référence** (= base la plus naturelle)

1. $\mathbb{K}^n$: $\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$; $\ldots$; $\vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$
2. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; $\ldots$; $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: la base canonique est la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, $E_{i,j}$ est la matrice où tous les coefficients sont nuls sauf celui placé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne qui est 1.
4. $\mathbb{K}_n[X]$: $(1, X, ..., X^n)$

4 Espaces vectoriels de dimension finie

4.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'il est de $\boxed{\text{dimension finie}}$ lorsque $E = \{0\}$ ou lorsqu'il admet une famille génératrice **finie**.

Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.

En revanche, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie, ni l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions réelles d'une variable réelle ....

`Théorème Existence de bases en dimension finie`

Soit E un ev non réduit au vecteur nul et de dimension finie. Alors, E admet une base de cardinal fini.

idée preuve : Comme E de dimension finie, il existe une famille génératrice finie de E.

Notons $\mathcal{F} = \{\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}\}$ une telle famille : alors $E = Vect(\vec{u_1}, ..., \vec{u_p})$.

Si $\mathcal{F}$ est libre, c'est fini. Sinon, $\mathcal{F}$ est liée et d'après ce qui précède, l'un des vecteurs (par exemple $\vec{u_p}$)

$\longrightarrow$ de toute famille génératrice finie, on peut en $\boxed{\text{extraire}}$ une base.

`Théorème de la base incomplète`

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Alors toute famille libre peut être $\boxed{\text{complétée}}$ en une base de E.

idée preuve : Soit $\mathcal{L} = \{\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}\}$ une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, on sait qu'il existe $\mathcal{G} = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ une famille génératrice finie de E.

Si $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est fini. Sinon, il existe un vecteur de $\mathcal{G}$, par exemple $\vec{v_1}$, tel que

Exemple : Soit $u = (1,1,1)$ et $v = (1,2,3)$.

Vérifier que (u,v) forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$, puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

`Théorème admis`

Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre a moins de vecteurs qu'une famille génératrice.

`Corollaire`

Soit E un ev de dimension finie. Alors toutes ses bases ont <u>même</u> cardinal.

`Démonstration`

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Comme $\mathcal{B}_2$ est libre, et $\mathcal{B}_1$ génératrice, d'après le résultat précédent, Card$(\mathcal{B}_2) \leq$Card$(\mathcal{B}_1)$.

En échangeant les rôles, on obtient l'égalité. $\square$

DÉFINITION Dimension
Soit E un espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, de dimension finie.
On appelle dimension de E, et l'on note $\dim(E)$, le nombre de vecteurs de toute base de E.
Par convention, si $E = \{\vec{0}\}$, on note $\dim(E)$=0.

Exemples fondamentaux : $\dim(\mathbb{K}^n) =$; $\dim(\mathbb{K}_n[X]) =$; $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$

4.2 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors
- Toute famille de E ayant strictement plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille de E ayant strictement moins de n vecteurs ne peut être génératrice.

idée preuve :
1. vient de "une famille libre a nécessairement moins de vecteurs qu'une famille génératrice" donc qu'une base.
2. vient de "d'une famille génératrice, on peut en extraire une base (de cardinal n)".

Théorème
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :
- Toute famille de E génératrice de cardinal n est une base de E.
- Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.

Démonstration
Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E de cardinal n. On sait qu'on peut en extraire une base de E. Mais cette base de E doit avoir n éléments puisque la dimension de E est n : il s'agit donc de $\mathcal{G}$ elle-même.
Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E de cardinal n. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E, mais qui doit être de cardinal n. Donc $\mathcal{L}$ est une base de E. □

4.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sev de E non réduit au vecteur nul : en particulier $F \subset E$.
Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
Si de plus, $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Remarque

1. Attention : on peut avoir deux sevs F et G tels que $\dim(F) \leq \dim(G)$ sans avoir pour autant $F \subset G$.
   par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $F = Vect((0,0,1))$ et $G = Vect((1,0,0),(0,1,0))$
   $dim(F) =$, $dim(G) =$ pourtant
2. Ce théorème donne une autre méthode pour montrer que $F = G$, avec F, G sev : il suffit de montrer l'une des deux inclusions ($F \subset G$ ou $G \subset F$) et de vérifier que $\dim(F)$=$\dim(G)$.

Exemple : Soit $G = Vect((X-3)^2, X+2, -5)$. Montrer à l'aide de ce résultat que $G = \mathbb{R}_2[X]$.
Comment aurait-on pu faire autrement ?

Vocabulaire : soit E un espace vectoriel de dimension n.
On appelle droite vectorielle (resp. plan vectoriel) tout sous-espace vectoriel de dimension 1 (resp. 2).

Exemple : on considère l'équation différentielle : $y' - 3y = 0$.
Montrer que l'ensemble solution est une droite vectorielle de l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Ce résultat se généralise-t-il à toutes les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 ?

Remarque : l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène est toujours un espace vectoriel, mais sa dimension change selon l'ordre.
Par exemple, soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un intervalle I : $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ avec a, b, c trois fonctions continues sur I. Montrer que son ensemble solution est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur I.

4.4 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition
Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie, et $\mathcal{F} = (\vec{u_1}, ..., \vec{u_p})$ une famille finie de vecteurs de E.
$\boxed{\text{On appelle rang de cette famille et on note } rg(\mathcal{F}) \text{ la dimension de } Vect(\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}).}$

Règles de calcul : (identiques aux règles sur Vect)
on ne modifie pas le rang d'une famille en enlevant le vecteur nul ou tout vecteur redondant, en multipliant un vecteur par un scalaire non nul, et en ajoutant/retranchant à un vecteur toute C.L. de vecteurs de la famille.

Exemple : déterminer le rang de $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1))$
puis le rang de la famille de polynômes $(X + 1, X + 2, X + 3, X + 4)$.

$\longrightarrow$ Avec les notations de la définition : la famille $\mathcal{F}$ est libre ssi $rg(\mathcal{F}) =$ et génératrice de E ssi $rg(\mathcal{F}) =$.

Définition
Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_p})$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}_E$ la matrice dont la i^e colonne est $Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{E}}(u_i)$.
Elle est notée $Mat_{\mathcal{B}_E}(\vec{u_1}, ..., \vec{u_p})$

Calcul pratique du rang : *Résultat admis :*
Soit $\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}$ une famille de vecteurs de E. Alors $rg(\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}) = rg(Mat_{\mathcal{B}_E}(\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}))$.
Autrement dit, le rang d'une famille finie de vecteurs est égal au rang de la matrice de cette famille de vecteurs.

Retour exemple : déterminer d'une autre façon le rang de la famille $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1))$.

5 Rappels sur l'inversibilité de matrices

Définition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.
La matrice B, unique, est alors appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

`Proposition`
Soient A, B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

`Théorème`
La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système associé (S) : $AX = Y$ est un système de Cramer. Le cas échéant, l'unique solution du système $AX = Y$ est $X = A^{-1}Y$.

Remarque :
Un système est de Cramer ssi son système homogène associé l'est. Donc pour montrer l'inversibilité (ou la non-inversibilité) d'une matrice SANS obtenir la matrice inverse, il suffit de mq le système $AX = 0_{n,1}$ est de Cramer.

`Corollaire`
Une matrice carrée triangulaire (ou diagonale) est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

Cas particulier des matrices de taille 2 :
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $\boxed{ad - bc \neq 0}$ et dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Définition
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de M, noté $rg(M)$, le rang du système $MX = 0_n$.

`Proposition` Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M est inversible ssi $rg(M) = n$.

En pratique : penser aux opérations sur les lignes des matrices pour échelonner la matrice : le rang de M est alors le nombre de pivots de la matrice échelonnée.

Rappel : une matrice M est dite échélonnée si les deux conditions suivantes sont respectées
- si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes sont nulles également
- dans les lignes non-nulles, l'indice de la colonne où se trouve le premier coefficient non-nul croit strictement. Dit autrement, le nombre de 0 en début de ligne croit strictement.

On appelle alors pivot le premier coefficient non-nul de chaque ligne non-nulle.

$\longrightarrow$ Les méthodes sur le rang seront revues dans le prochain chapitre.