# Intégration sur un intervalle quelconque

## 1 Intégrales généralisées

### 1.1 Intervalle $[a, b[$

Définition
Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
On dit que l'intégrale impropre en $b$ (ou généralisée en $b$) $\int_a^b f(t)dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque $x \to b$. On pose alors : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$
Dans le cas contraire, (si la limite est infinie ou n'existe pas), on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) diverge.

Définition
Etudier la nature d'une intégrale généralisée, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

*Exemples :*
Nature des intégrales généralisées suivantes : $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ ; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ ; $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2}dt$.

*Remarque*
Si $b \in \mathbb{R}$, et si $f$ est continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt$ vérifie : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ donc on est bien en train de *généraliser* la notion d'intégrale définie en première année .

En effet, si on note $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ alors $F$ est
Donc $F$ est $C^1$ sur $[a, b]$ donc en particulier $F$ est continue en $b$, et par définition de la continuité au point $b$, $\int_a^x f(t)dt = F(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow}$

**Exemple fondamental :**
Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b[$ (avec $b \in \mathbb{R}$), et $\boxed{\text{prolongeable par continuité au point } b}$.
Alors $\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^b f(t)dt \text{ converge}}$ (elle est parfois dite *faussement impropre*), et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$, où $\tilde{f}$ est la fonction prolongée de $f$.

Démonstration
Posons $\tilde{f}$ la fonction prolongée de $f$. Alors pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) = \tilde{f}(t)$
donc pour tout $x \in [a, b[$ $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \tilde{f}(t)dt$. Or $\tilde{f}$ est continue sur $[a, b]$ donc d'après la remarque ci-dessus, $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$ existe et $\lim_{x \to b} \int_a^x \tilde{f}(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$. On en déduit que $\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{\longrightarrow} \int_a^b \tilde{f}(t)dt \in \mathbb{R}$ ;
donc l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$. □

*Exemple :* Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^0 \frac{1-(1-x)^2}{x}dx$, et donner sa valeur.

### 1.2 Intervalle $]a, b]$

Définition
Soit $f$ une fonction continue sur $]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
On dit que l'intégrale impropre en $a$ (ou généralisée en $a$) $\int_a^b f(t)dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie lorsque $x \to a$. On pose alors : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt$
Dans le cas contraire, (si la limite est infinie ou n'existe pas), on dit que l'intégrale généralisée diverge.

*Exemples :* Nature des intégrales impropres suivantes $\int_{-\infty}^0 e^t dt$, $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$.

*Exemple :* Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^1 t \ln t dt$.

### 1.3 Intervalle $]a, b[$

Définition
Soit $f$ une fonction continue sur $]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale deux fois impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, si pour un réel $c \in ]a, b[$, les deux intégrales (impropres une fois) $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes : on pose alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.
Sinon, lorsqu'au moins une des deux intégrales diverge, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite divergente.

*Remarque*
La convergence, comme le calcul de l'intégrale en cas de convergence, ne dépend pas du réel $c$ choisi, puisqu'il y a continuité sur l'intervalle $]a,b[$ : autrement dit si c'est vrai pour un $c$ c'est vrai pour tous les $c \in ]a,b[$.

*Exemple :* Convergence et calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$.

$\longrightarrow$ **en pratique :**
lorsque l'on reconnaît une primitive, on pose $A$ et $B$ avec $a < A < B < b$ ; on calcule $\int_A^B f(t)dt$ puis on étudie la limite quand $(A,B) \to (a,b)$. En cas de convergence, on a alors : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{(A,B)\to(a,b)} \int_A^B f(t)dt$.
En revanche, la lettre $c$ devra être posée (concrètement) lorsqu'on utilisera les critères (cf section 3.).

# 2 Propriétés et calcul des intégrales impropres

## 2.1 Premières propriétés

Toutes les propriétés des intégrales sur un segment restent vraies pour les intégrales généralisées convergentes.

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$ ou $]a,b[$). Alors,

**Linéarité :** `combinaisons linéaires d'intégrales impropres convergentes`

1. Pour tout $\lambda \neq 0$, les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)dt$ sont de même nature.
   De plus, si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
2. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)+g(t)dt$ converge et $\int_a^b f(t)+g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
3. Plus généralement, si toutes les intégrales en jeu convergent, alors $\int_a^b \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)dt$.

*Attention réciproque du 2. fausse* :
L'intégrale $\int_a^b f(t)+g(t)dt$ peut converger sans que les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent. Dans ce cas l'égalité ci-dessus n'a aucun sens (peut faire apparaître du $+\infty - \infty$ par exemple).
Par exemple avec $f : t \mapsto e^{-t} - \frac{1}{t}$, $g : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1,+\infty[$. Les intégrales $\int_1^{+\infty} f$ et $\int_1^{+\infty} g$ divergent
mais $f+g : t \mapsto$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}(f+g)$

**Relation de Chasles :**
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors pour tout $c \in ]a,b[$, on a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

**Positivité et croissance de l'intégrale :** On suppose que $\boxed{a \leq b}$.

1. Si $f$ est positive sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$ ou $]a,b[$) et si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
2. Si $\forall t \in [a,b[$ (resp. $]a,b]$ ou $]a,b[$) $f(t) \geq g(t)$ et si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

**Stricte positivité de l'intégrale :** énoncé sur $[a,b[$ à adapter tel quel sur $]a,b]$ ou $]a,b[$
Soit $f$ une fonction **continue** et positive sur $[a,b[$ avec $\boxed{a < b}$, telle que $\int_a^b f(t)dt$ converge.
Si de plus $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $\forall t \in [a,b[$, $f(t) = 0$.

`Par contraposée :`
Soit $f$ une fonction **continue** et positive sur $[a,b[$, avec $\boxed{a < b}$, telle que $\int_a^b f(t)dt$ converge.
Si alors

Cas particulier fréquent :
Si $f$ est **continue** et strictement positive sur $[a,b[$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points), avec $\boxed{a < b}$, telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors

## 2.2 Intégration par parties et changement de variable

L'intégration par parties et le changement de variables restent les deux seuls outils de calcul de ce chapitre.
Attention, l'IPP devra toujours être mise en oeuvre sur des intégrales finies (càd sur des segments).
En pratique dans le cas où l'intégrale est impropre en $b$ (à adapter sinon) :

1. justifier au préalable la convergence de l'intégrale : étape non obligatoire mais parfois conseillée
2. tronquer l'intégrale en posant $x \in ]a,b[$ (si l'intégrale est doublement impropre, tronquer des 2 côtés)
3. faire toutes les étapes de calcul d'IPP sur l'intégrale tronquée $\int_a^x f(t)dt$
4. à la fin, prendre la limite quand $x$ tend vers $b$ (double passage à la limite si intégrale doublement impropre) : ne pas oublier de justifier l'existence de cette limite si l'étape 1 n'a pas été faite au préalable !
5. $\boxed{\text{Conclure}}$, en remarquant que $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$ .

*Exemple 1 :* convergence et calcul de l'intégrale $\int_0^1 t \ln t dt$.

Pour le changement de variable, il est possible de suivre la méthode ci-dessus, et de se ramener à une intégrale sur un segment. Mais il sera souvent préférable d'utiliser le théorème suivant :

`Théorème énoncé sur ]a,b[, à adapter sinon`
Soit $f$ une fonction continue sur $]a,b[$ (avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) et $\varphi$ une fonction de classe $C^1$ strictement monotone sur $]\alpha,\beta[$ avec $a = \lim\limits_{t\to\alpha} \varphi(t)$ et $b = \lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t)$. Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence, on a l'égalité : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .

*Exemple 2 :* convergence et calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx$ en posant $x = \ln(t)$.

### 2.3 Propriétés de parité/imparité

`Théorème`

1. Soit $f$ une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$.
   Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge ssi $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ converge, et le cas échéant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   De plus, en cas de convergence, $\int_{-\infty}^0 f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
2. Soit $f$ une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$.
   Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge ssi $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ converge, et le cas échéant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   De plus, en cas de convergence, $\int_{-\infty}^0 f(t)dt = -\int_0^{+\infty} f(t)dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.

$\longrightarrow$ `preuve`

# 3 Convergence des intégrales impropres

### 3.1 Cas des fonctions positives

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a,b[$. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est
En particulier, $F$ admet une limite à gauche en $b$.
On en déduit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a,b[$.
Dans le cas contraire, elle diverge et $\boxed{\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = +\infty}$

Ce résultat s'adapte sur l'intervalle $]a,b]$ puisque $F : x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ est alors

### 3.2 Critères de convergence pour les intégrales impropres une fois

`Théorème énoncé pour des intégrales impropres en b, à adapter sinon`
Soit $f$ et $g$ **deux fonctions continues** sur $[a,b[$ et **positives** au voisinage de $b$.

`Critère de comparaison`
Si au voisinage de $b$, $f(t) \leq g(t)$ et si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
Par contraposée, si au voisinage de $b$, $f(t) \geq g(t)$ et si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

`Critère d'équivalence`
Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)$ sont de même nature.
En particulier, si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

*Remarques :*

1. Ces critères permettent de justifier la convergence d'une intégrale impropre, mais ne permettent pas le calcul de la valeur de l'intégrale.

2. Pour les intégrales impropres deux fois, il faudra couper l'intégrale en 2 (en posant $c$) puis faire deux études séparées.
3. Le critère d'équivalence s'adapte si $f$ et $g$ sont négatives puisque par linéarité, les intégrales $\int_a^b h$ et $\int_a^b -h$ sont de même nature. En revanche, si $f$ n'est pas de signe constant, il faut passer par la convergence absolue (cf section suivante).

*Exemple 1 :* Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge.
En déduire que les intégrales suivantes convergent : $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$.

*Exemple 2 :* Convergence de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. On admettra dans la suite que : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}}$

### 3.3 Convergence absolue

Définition
Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$ ou $]a, b[$).
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

**Théorème**
Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors elle converge.

$\longrightarrow$ réciproque fausse ...

**Démonstration**
Remarquer que $f = (f + |f|) - |f|$. Or $f + |f|$ est une fonction continue, positive et inférieure à $2|f|$.
Comme l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge, on en déduit (critère de comparaison) que l'intégrale $\int_a^b f + |f|$ converge. D'où par somme de deux intégrales convergentes (linéarité), $\int_a^b f$ converge. $\square$

**Inégalité triangulaire :** Soit $\boxed{a \leq b}$
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

## 4 Intégrales fréquemment rencontrées

Attention, aucun résultat de cette section n'est au programme officiel ! La seule intégrale de référence est l'intégrale de Gauss. Les résultats qui suivent devront donc être redémontrés avant d'être utilisés.

**Intégrale de la fonction exponentielle :**
Si $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$.
$\longrightarrow$ preuve

**Intégrales de Riemann**
$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty}$ : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge.
Plus précisément :
Si $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha-1}$. Sinon ($\alpha \leq 1$), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge.

$\boxed{\text{Au voisinage de } 0}$ : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge.
Plus précisément :
Si $\alpha < 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}$. Sinon ($\alpha \geq 1$), l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge.
$\longrightarrow$ preuve

## 5 Extension aux fonctions continues sauf en un nombre fini de points

Définition Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I = [a_0, a_{n+1}]$ sauf en un nombre fini de points $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f$ est continue sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ .
On dit alors que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ converge si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ l'intégrale $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ converge.

Le cas échéant, on <u>pose</u> : $\int_I f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$.

*Exemples :*
Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ puis lorsque $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t|^3} & \text{si } |t| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$