Polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités : rappels

P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ si il s'écrit

Ses coefficients sont
P est de degré n si de plus . Le coefficient dominant de P est alors :
P est dit unitaire si

Exemple : déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X) = X^3 - X(X-i)^2$.
indication : commencer par écrire le polynôme P sous "forme canonique", c'est-à-dire en développant P puis en rangeant les monômes ...

Questions :
1. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ un polynôme à coefficients réels ou complexes. Que peut-on dire sur son degré ?
2. Quel est le degré d'un polynôme constant non-nul ?

Le polynôme nul, noté 0, est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, il est de degré $-\infty$.

A retenir : $P \in \overbrace{\mathbb{K}_n[X]}^{\text{ensemble des polynômes de degré} \leqslant n}$ ssi P s'écrit

$P \in \mathbb{K}_n[X]$ est de <u>degré n</u> ssi P s'écrit

Unicité de l'écriture des polynômes
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\boxed{\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0}$

On en déduit : $\boxed{\text{deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont mêmes coefficients}}$.

Opérations sur les polynômes et propriétés du degré
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $P+Q$, λP, PQ et $P \circ Q$ sont encore des polynômes.
De plus,
— $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ $\boxed{\text{et si}}$ $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
— $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$
— si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$

Exemples : Soit $P = X^2 + 3$ et $Q = 4X^3 - 3X^2 + 2$. Déterminer le degré de P, de Q, de $P+Q$ puis de PQ.

Même question avec $P(X) = X^4 + 1$ et $Q(X) = -X^4 + 3X^3$.

Remarque Les deux notations P et $P(X)$ sont possibles. Dans le cas de la première notation, attention de bien écrire les produits à gauche. En effet, $P(X^2+1)$ signifie une composée, alors que $(X^2+1)P$ signifie un produit ! ! Si le produit est à droite, il faut alors écrire $P(X)(X^2+1)$.

Propriété d'intégrité :
Soit P et Q deux polynômes tels que $P \times Q = 0$. Alors soit $P = 0$ soit $Q = 0$.

En effet, si on avait $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors $deg(P) \geq 0$, $deg(Q) \geq 0$ et donc d'après les formules ci-dessus, $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q) \geq 0$. En contradiction, avec $PQ = 0$.

Remarque : cette propriété d'intégrité n'est pas présente dans tous les espaces étudiés.
La propriété d'intégrité est vraie dans mais fausse dans

Polynômes dérivés :
Exemple : Calculer les dérivées successives de $P(X) = X^4 + 2X^2 - 1$ et rappeler les notations.

Remarque :

- Si P est de degré $n \geq 1$, alors $deg(P') =$
- Si P est un polynôme constant (donc de degré $n = 0$), alors $deg(P') =$
- Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $k > n$, $P^{(k)} = 0$

Exercice : calculer les dérivées successives du polynôme X^n, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

2 Racines et factorisations

Rappels : soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z} =$

Propriétés du conjugué : soit z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\overline{\lambda z_1} =$ $\qquad$ $\overline{z_1 + z_2} =$ $\qquad$ $\overline{z_1 z_2} =$ $\qquad$ $\overline{z_1^n} =$

$\longrightarrow$ preuve

2.1 Racines

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

`Proposition`

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$. En particulier, α est racine de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de P.

$\longrightarrow$ preuve

Exemple : Soit $P(X) = 2X^3 - 2X^2 + X$. Montrer que $\alpha = \frac{1+i}{2}$ est racine de P. Qu'en déduit-on ?

`Théorème admis`

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est racine de P ssi il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$

`Théorème` : **Généralisation**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, ..., \alpha_p$ p éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. Alors

$\alpha_1, ..., \alpha_p$ sont p racines de P ssi il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)...(X - \alpha_p)Q$.

En particulier, si P est un polynôme de degré n, admettant n racines distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_n$,

alors P s'écrit : $P = \underbrace{a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)}_{\text{forme factorisée}}$ où a_n est le coefficient dominant de P.

Exemple : Soit $P(X) = 2X^2 - 6X + 4$. Montrer que 1 et 2 sont racines puis retrouver la factorisation de P.

On en déduit le résultat suivant :

Soit P un polynôme de degré n. Alors P possède au plus n racines distinctes.
Donc un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul.
En particulier, un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

Exercice 1 : Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = Q(0)$; $P(1) = Q(1)$ et $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 2 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x(x - 1)P(x) = 0$. Que peut-on en déduire ?
On cherchera 2 méthodes.

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une racine multiple de P si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^2 Q(X)$.

Plus précisément, α est une racine de multiplicité k de P si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. (k est la puissance "maximale" possible)

Une racine est donc multiple dès que $k > 1$.

Vocabulaire : si $k = 1$ on dit que α est racine simple de P, et si $k = 2$, on dit que α est racine double de P.

Remarque l'ordre de multiplicité d'une racine est inférieure au degré du polynôme.

`Théorème admis`
α est racine multiple de P ssi $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Exemple : Montrer que 1 est racine multiple de $P(X) = X^4 + 2X^3 - 5X^2 + 2$. Qu'en déduit-on ?
En bonus, finir la factorisation de P.

Bilan : le trinôme à coefficients réels $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, P admet deux racines (simples) réelles distinctes r_1 et r_2 ; et P se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ en $P(X) =$
- si $\Delta = 0$, P admet une racine réelle double r ; et P se factorise en $P(X) =$.
- si $\Delta < 0$, P n'admet aucune racine réelle et P ne se factorise pas dans $\mathbb{R}[X]$. Par contre dans $\mathbb{C}[X]$, P admet deux racines (simples) complexes conjuguées r et $\bar{r}$ et P se factorise en $P(X) =$

2.2 Existence de racines et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

`Théorème de D'Alembert-Gauss : admis`

Tout polynôme à coefficients réels ou complexes non constant admet au moins une racine complexe.

Attention cette racine n'est pas forcément réelle : $P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$!

Dans $\mathbb{R}[X]$, on a le résultat plus anecdotique suivant :

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

$\longrightarrow$ `preuve`

En "itérant" le théorème de D'Alembert-Gauss, on peut en déduire une forme factorisée de tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant (sinon, il n'y a rien à faire !).
Donc (théorème de d'Alembert-Gauss), il existe $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha_1) = 0$.
Donc (section précédente) il existe $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P = (X - \alpha_1)Q_1$.
Si Q_1 est le polynôme constant (autrement dit si $deg(P) = 1$), on s'arrête, sinon on continue.
Q_1 est un polynôme non constant donc (théorème de d'Alembert-Gauss) il existe $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ tel que $Q_1(\alpha_2) = 0$.
Donc (section précédente) il existe $Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q_1 = (X - \alpha_2)Q_2$.
Autrement dit, $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)Q_2$.
Si Q_2 est constant, on s'arrête (cas où $deg(P) = 2$), sinon on poursuit !
Le processus est bien sûr fini puisqu'il y aura $n = deg(P)$ étapes.

On obtient le résultat suivant :

`Théorème`

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, et $n = deg(P) \geq 1$.
Alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ n complexes tels que $P = \underbrace{a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)}_{\text{forme factorisée}}$ où a_n est le coefficient dominant de P.

$\longrightarrow$ les α_k sont les racines de P et peuvent ne pas être distinctes (dans le cas de racines multiples) : on peut alors regrouper certains facteurs ....

Comme on l'a vu précédemment, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ne se factorise pas toujours complètement dans $\mathbb{R}[X]$... mais parfois si, notamment lorsqu'il a $n = deg(P)$ racines réelles distinctes (cf section précédente)

Exemple 1 : Factoriser $X^3 - X^2 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2 : Factoriser $X^3 - 3X^2 - 9X - 5$ dans $\mathbb{R}[X]$, après avoir montré que -1 était racine multiple.

Exemple 3 : Factoriser $X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ après avoir montré que $1 + i$ est racine. *Exemple 4 "frontière du programme" :* Factoriser $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
on commencera par chercher une racine évidente : 0,1,-1,2,-2 etc