# Equations différentielles : rappels et compléments

## 1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme :
$(E)$

Résoudre $(E)$ c'est

### 1.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Forme d'une telle équation différentielle :
$(E_c)$ $\forall t \in I$, $y'(t) + ay(t) = f$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé et $f$ une fonction continue sur $I$.

**Méthode de résolution :**

1. On résout l'équation homogène associée : $\forall t \in \mathbb{R}$,

   Les solutions sont les fonctions $y$ de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) =$

2. On cherche alors une solution particulière $y_p$ de l'équation complète $(E_c)$.

   Rappel : une telle solution particulière existe toujours, mais la forme peut ne pas être simple (forme intégrale).

3. On obtient alors toutes les solutions de $(E_c)$ en ajoutant $y_p$ aux solutions trouvées de l'équation homogène.

**Méthodes pour trouver une solution particulière :**

1. Cas le plus simple : $f$ est une constante. Alors
   Si $a \neq 0$, $y_p : t \mapsto$ convient.

   Si $a = 0$, $y_p : t \mapsto$ convient.

2. Bien suivre les indications de l'énoncé, car souvent l'énoncé propose de chercher une solution particulière sous une certaine forme.
3. Méthode de la variation de la constante.
4. Principe de superposition.

*Exemple 1 :* Résoudre l'équation différentielle suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) + 5y(t) = 1$.

*Exemple 2 :* Résoudre l'équation : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) + 2y(t) = -1 + e^{-t}$.
Pour la recherche d'une solution particulière, on mettra en oeuvre la méthode de la variation de la constante, puis la méthode par principe de superposition.

### 1.2 Cas général : retour à $(E)$

La méthode de résolution est la même que dans la section précédente, mais l'ensemble solution de l'équation homogène est :

*Exemple 3 :* Résoudre l'équation $ty' - y = t^3$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

*A retenir, même si le résultat n'apparait pas dans le programme officiel :* pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, l'équation $(E)$ admet une unique solution $y$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

## 2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Equations de la forme :

$$(E) \qquad \forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \qquad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ et } f \text{ continue sur } I$$

Pour trouver l'ensemble solution de l'équation homogène associée, on résout l'équation caractéristique :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ et les solutions sont de la forme
$y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle $r$ et les solutions sont de la forme
$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

— Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ et les solutions sont de la forme
$y : t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Ensuite il faut trouver une solution particulière $y_p$ de l'équation complète $(E)$

Les solutions de $(E)$ sont alors obtenues en ajoutant $y_p$ à l'expression obtenue des solutions de l'équation homogène.

*Remarque :* pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution de $(E)$, il faut maintenant fixer deux conditions initiales : autrement dit pour tout $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de $(E)$ vérifiant de plus les conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

*Exemple 4 :* Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + y = 2$.

## 3 Equations différentielles autonomes du premier ordre

Définition
Une équation différentielle d'ordre 1 est dite autonome lorsqu'elle est sous la forme $y' = F(y)$ où $F$ est une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
Une solution d'une telle équation est un couple $(y, J)$ constitué d'une fonction $y$ de classe $C^1$ sur l'intervalle $J$ et à valeurs dans $I$ tel que pour tout $t \in J$, $y'(t) = F(y(t))$.

*Remarque :*
Aucune connaissance théorique ni aucune méthode de résolution n'est au programme de bcpst 2.
Néanmoins, il est intéressant de retenir que la résolution d'une telle équation se fera souvent à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse.
Quelques pistes (pour l'analyse) : on pourra vous guider un changement d'inconnue (cf exemple 5), ou lorsque la fonction $F$ ne s'annule pas, on pourra réécrire l'équation sous la forme $\dfrac{y'(t)}{F(y(t))} = 1$ pour tout $t \in J$ et primitiver membre à membre (cf exemple 6).

*Exemple 5 :* Résolution de l'équation différentielle autonome $y' = e^{-y}$ $(E)$.

1. Soit $u$ une solution de $E$ sur un intervalle $I$. On pose $v = e^u$.
   (a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par $v$. En déduire une expression de $v$.
   (b) En déduire une condition sur $I$ ainsi qu'une expression de $u$.
2. Déterminer les solutions de $E$. On précisera les intervalles les plus grands possibles (=intervalles maximaux) sur lesquels elles sont définies.

*Exemple 6 :* Résolution de l'équation différentielle autonome $(E) : y' = y^2 + 1$.

1. Soit $y$ une solution de cette équation sur un intervalle $I$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $A$ tel que pour tout $t \in I$, $\arctan(y(t)) = t + A$.
   (b) En déduire une condition nécessaire sur l'intervalle $I$ ainsi que l'expression de $y$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de $(E)$ définies sur un intervalle maximal.