Analyse : rappels sur les fonctions d'une variable réelle

Les 4 formes indéterminées (F.I.) sont : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Croissances comparées en $+\infty$: pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $\frac{x^a}{e^{bx}} = x^a e^{-bx} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{(\ln x)^b}{x^a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Croissances comparées en 0 : pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $x^a (\ln x)^b \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. En particulier $x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Equivalents usuels : $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ $\qquad \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ $\qquad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2} x$

$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ $\qquad \tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ $\qquad 1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2} x^2$

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0. Alors f est équivalente à g au voisinage de x_0 , noté $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$, si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$.

f est négligeable devant g au voisinage de x_0, noté $f = \underset{x \to x_0}{o}(g)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Asymptotes :
f admet une asymptote verticale en x_0 (donc d'équation $x = x_0$) si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$

f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$)

Dans toute la suite, on considère une fonction à valeurs réelles f définie sur un intervalle I, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

f est continue en x_0 si $\begin{cases} x_0 \in I \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

f se prolonge par continuité en x_0 si $\begin{cases} x_0 \notin I \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$

f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$. $\qquad$ On note alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Lien entre continuité et dérivabilité en x_0 :
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
Attention, la réciproque est fausse : par exemple, $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Equation de la tangente à $\mathcal{C}$ en x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

f est une bijection de I sur J si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
Cet unique antécédent x est alors noté $f^{-1}(y)$.
On a alors l'équivalence : pour tout $(x, y) \in I \times J$, $\qquad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

f est injective sur I si pour tout $(x, x') \in I^2$ tels que $f(x) = f(x')$, on a $x = x'$.

f est surjective de I sur J si pour tout $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Théorème de la bijection :
Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
De plus, l'intervalle $f(I)$ est de même nature que I (ouvert, fermé ...). Enfin, f^{-1} est continue et strictement croissante sur $f(I)$ et sa monotonie est celle de f.

Théorème de la dérivabilité de la réciproque :
Soit f une bijection dérivable d'un intervalle I dans un intervalle $J = f(I)$.
Si de plus, pour tout $x_0 \in I$, $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J
et pour tout $y_0 \in J$, $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
Si en $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et sa courbe représentative admet une tangente verticale en ce point.

$\longrightarrow$ représentation graphique

L'incontournable de la fonction arctan :
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et réalise donc une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction arctan (qui est sa réciproque) réalise donc une bijection continue et croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.
En particulier, $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. De plus $\tan(0) = 0$ donc $\arctan(0) = 0$.
En appliquant le théorème de la dérivabilité de la réciproque, on obtient que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Enfin, on peut montrer que arctan est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.

Les Théorèmes plus abstraits du programme de première année

Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe au moins un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$.
Alors pour tout $y \in [\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)]$, il existe au moins un réel $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$.

Corollaire : soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que $f(a)f(b) \leq 0$.
Alors il existe (au moins un) $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème des valeurs extrêmes :
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Alors f admet un minimum et un maximum sur $[a, b]$.
Autrement dit, f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Théorème de Rolle :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable au moins sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Formule des accroissements finis :
Soit deux réels a et b tels que $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable au moins sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

(a) Pour les développements limités usuels, cf votre cours de 1ere année

(b) Formule de Taylor-Young pour une fonction f de classe C^n au voisinage de 0 : $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

Cette formule donne à l'ordre 1 : $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$
En l'appliquant à arctan : $arctan(x) = 0 + x + o(x)$ d'où $arctan(x) \sim x$.

(c) Opérations permises sur les équivalents : produit, quotient, puissance constante (ce qui inclut la racine carrée), changement de variable
Opérations interdites sur les équivalents : somme, composée (quelconque), et puissance non constante.

Opérations permises sur les DLs : somme, produit, troncature, et produit(ou division) par x^p.
Les quotients et composées de DLs ne sont pas des attendus du programme.