Séries

1 Définitions - Premiers exemples

1.1 Premières définitions

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

On appelle série de *terme général* u_n la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

S_n est appelée *somme partielle* d'indice n et on note la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Remarque importante :

Soit la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$.
En effet, d'après la relation de Chasles, $S_n - S_{n-1} =$

Autres remarques :

1. La série de terme général u_n est donc une *suite* étudiée d'un point de vue nouveau. Au lieu de s'intéresser à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on s'intéresse à la convergence de $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si la suite (u_n) n'est définie que pour $n \geq n_0$, on note la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, et il faut alors considérer $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
   Tous les résultats qui suivent pourraient bien sûr être rédigés avec n_0 comme indice de départ mais par soucis de clarté, ils seront rédigés pour une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge.

La limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est alors appelée *somme de la série* et est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$:

$$\text{on a donc } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Déterminer la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Attention : ne pas confondre $\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\sum_{n\geq 0}$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une suite.

L'écriture symbolique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a un sens que si la série converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est alors un réel ($= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$)

Pour ne pas confondre : toujours préciser "la série" devant la notation symbolique $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemples :

1. La série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ est la série de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$: $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   Montrer que cette série converge et préciser la valeur de la somme de la série.
2. La série harmonique est la série de terme général $\frac{1}{n}$ notée $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. *On proposera 3 méthodes.*
   (b) En déduire la divergence de cette série.
3. Convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ notée $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n =$
   (a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.
   (c) En déduire que la suite (S_n) est majorée puis conclure.

1.2 Une série particulière : $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})$. Alors S_n est

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n =$

Donc la suite (S_n) converge ssi la suite (u_n) converge.

Exemple :

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge, et préciser la valeur de la somme de série.

1.3 Séries alternées

Exemple d'étude : la série alternée $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$. Poser pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

Montrer alors que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis conclure.

2 Premières propriétés

2.1 Condition nécessaire de convergence

`Théorème` $\boxed{\text{Si la série } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge, alors } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Par contraposée, si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge (la divergence est dite grossière).

$\longrightarrow$ preuve

Exemple : la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n}{3n+2}$ diverge grossièrement car $\frac{n}{3n+2} \sim \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \neq 0$.

Remarque Réciproque fausse : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ mais la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

2.2 Relation de Chasles

Pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ ont même nature,

et **en cas de convergence** , $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

$\longrightarrow$ la relation de Chasles, vraie pour les sommes finies, reste vraie pour les sommes de séries convergentes.

2.3 Linéarité

`Théorème Combinaisons linéaires de séries convergentes`

1. pour tout $\lambda \neq 0$, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda u_n$ sont de même nature ET en cas de convergence, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$
2. si les $\boxed{2}$ séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ convergent, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$

$\longrightarrow$ pour la preuve, il suffit de poser les sommes partielles puis de passer à la limite ....

Remarques :

1. La linéarité pour les sommes finies reste vraie pour les séries si toutes les séries en jeu convergent.
2. Attention, la réciproque du 2. est fausse. Par exemple, avec $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{n}$, $u_n + v_n = \frac{1}{3^n}$ la série $\sum\limits_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ converge ; pourtant la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

3 Critères de convergence

3.1 Séries à termes positifs

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série $\boxed{\text{à termes positifs}}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite (S_n) est <u>croissante</u>.

D'où `Théorème` :
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge ssi la suite (S_n) est majorée.

Et en cas de divergence, $\boxed{S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

Remarque :
En pratique, pour majorer S_n, on commence par majorer u_n, cf convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

3.2 Comparaisons

`Théorème`
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ $\boxed{\text{deux séries à termes positifs}}$ (au moins à partir d'un certain rang).

<u>`Critère de comparaison`</u>
Si à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leq v_n$ alors
- $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et dans ce cas, $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
- $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.

<u>`Critère d'équivalence`</u>
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

$\longrightarrow$ `Preuve du théorème :`

Attention : ces critères permettent d'obtenir la convergence d'une série MAIS ne donnent pas la somme de la série.
Par ailleurs, réaliser qu'il faut une hypothèse sur u_n, non sur $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ ou $\sum u_n$: à bien rédiger (ne pas confondre la rédaction du critère avec la preuve du critère)

<u>*Exemples*</u> : on rappelle que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
En déduire la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^3+1}$

3.3 Absolue convergence

Définition
La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

`Proposition`
Une série absolument convergente est convergente. Autrement dit, $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exemple : la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge car

Attention la *réciproque* estfausse !
Contreexemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ mais

Inégalité triangulaire :
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

4 Séries de référence

4.1 Séries géométriques et séries géométriques dérivées

`Proposition`

La série $\sum_{n\geq 0} x^n$, appelée série géométrique de raison x, est convergente ssi $|x| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

$\longrightarrow$ preuve

`Proposition` Convergence des séries géométriques dérivées première et deuxième :

1. La série $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge ssi $|x| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. La série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ converge ssi $|x| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

$\longrightarrow$ *Moyen mnémotechnique et justification des noms*

Application 1 :
Convergence de la série $\sum_{n\geq 0} nx^n$ lorsque $|x| < 1$ et calcul de la somme.

Application 2 :
Convergence de la série $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ lorsque $|x| < 1$ et calcul de la somme, à l'aide de l'astuce $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 = n(n-1) + n}$

4.2 Séries de Riemann

`Proposition` La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

La preuve de cette proposition a été faite dans la première section.

4.3 Série exponentielle

`Proposition` La série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

La preuve de la convergence fera l'objet d'un exercice.