TP 7 : Méthode d'Euler

Méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles d'ordre 1.

Soit une équation différentielle d'ordre 1 : $y'(t) = f(t, y(t))$ qui admet une solution y de classe C^1 sur un intervalle I de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

L'idée est d'approcher la solution point par point en partant de la valeur initiale $y(t_0) = y_0$.
La première question est donc : comment approcher $y(t_0 + h)$ quand h est petit ?

Une façon de procéder est d'approximer $y'(t_0)$ par son taux d'accroissement (autrement dit on approche la courbe par sa tangente) : en effet, si $h > 0$ est petit, $y'(t_0) \simeq \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}$.
On a donc $\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \simeq y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ soit encore $y(t_0 + h) - y(t_0) \simeq h \times f(t_0, y(t_0))$.

$$\boxed{\text{pour } h \text{ petit,} \qquad y(t_0 + h) \simeq y(t_0) + h \times f(t_0, y(t_0))}$$

Posons $t_1 = t_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h \times f(t_0, y_0)$. On a donc $y_1 \simeq y(t_0 + h) = y(t_1)$.
On itère ce raisonnement :
on pose $t_2 = t_1 + h$ et $y_2 = y_1 + h \times f(t_1, y_1)$ etc. jusqu'à sortir de l'intervalle I d'intérêt.
On aura ainsi construit une succession de points (t_k) et d'ordonnées (y_k) vérifiant les relations suivantes appelées "Schéma d'Euler" : pour tout k, $\boxed{t_{k+1} = t_k + h \quad \text{et} \quad y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k, y_k)}$.

Au vu de la construction, on peut s'attendre à ce que $y_k \simeq y(t_k)$. Donc en interpolant les (y_k), on pourra visualiser une approximation de la courbe de la solution y de départ.

Remarque importante : Comme pour la méthode des rectangles, on pourra choisir un entier n qui donnera l'idée du nombre de points que l'on souhaite pour l'interpolation.
Lorsque $I = [a, b]$, le pas de la subdivision sera alors $\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$, et on construira ainsi n points $(t_0, y_0), ..., (t_{n-1}, y_{n-1})$.

Exercice 1:

Soit l'équation différentielle $y' = 1 - 2y$ sur $[0, 2]$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

1. Déterminer la solution exacte à ce problème.
2. Ecrire le schéma d'Euler associé à ce problème pour un n quelconque fixé. Autrement dit, écrire les conditions vérifiées par la suite des instants (t_k) et la suite des ordonnées (y_k) pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
3. Ecrire une fonction python qui au paramètre d'entrée n renvoie la liste des instants $[t_0, ..., t_{n-1}]$ et la liste des ordonnées $[y_0, ..., y_{n-1}]$.
4. Représenter sur un même graphique la solution exacte ainsi que la solution approchée obtenue par la méthode d'Euler. On pourra choisir $n = 10$ puis $n = 50$. Constater.

Exercice 2: Modèle de Lokta-Volterra

Les équations de Lokta-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », sont un couple d'équations différentielles non linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.
Par exemple, l'évolution de population de lynx et de lièvre des neiges dans la baie d'Hudson au 19ième siècle a été modélisée par le système différentiel suivant : $x(0) = 2$ et $y(0) = 1$ et pour tout $t \geq 0$ $\begin{cases} x'(t) = x(t) - x(t) \times y(t) \\ y'(t) = -y(t) + x(t) \times y(t) \end{cases}$
où l'on a noté $x \mapsto x(t)$ (resp. $t \mapsto y(t)$) l'effectif des proies (resp. des prédateurs) en fonction du temps.

L'interprétation (en quelques mots) est la suivante : les proies se reproduisent naturellement sans prédateurs, et meurent "proportionnellement à la présence des prédateurs". Les prédateurs meurent sans proie, et se multiplient "proportionnellement à la présence des proies".

1. Ecrire le schéma d'Euler pour x et pour y, dans le cas d'une subdivision régulière de $[0, T]$ en n points.
2. En choisissant $T = 20$ et $n = 200$, représenter sur le même graphique une approximation de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0, T]$. Choisir alors $n = 2000$. Comment expliquer la différence ?
3. En gardant $T = 20$ et $n = 200$, représenter graphiquement y en fonction de x : ce graphe s'appelle le portrait de phase. Constater et décrire le modèle d'évolution.
   Choisir alors $n = 2000$ puis $n = 20000$. Constater ... et expliquer.

Exercice 3: A vous de jouer !

Voici 6 équations différentielles d'ordre 1 :

(a) $y'(t) = y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{4.8}\right)$

(b) $y'(t) = -y(t) + \cos(t)$

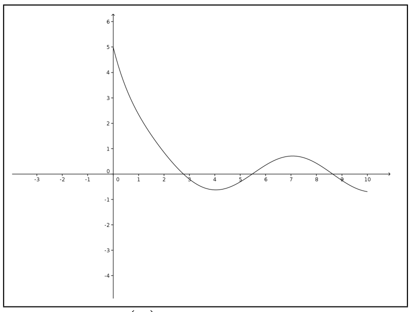
(c) $y'(t) - 0.2y(t) = 0$

(d) $y'(t) = y(t) - y^2(t)$

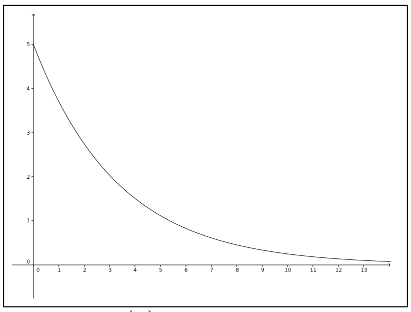
(e) $y'(t) + \tan(t)y(t) = \cos(t)$

(f) $y'(t) + 0.3y(t) = 0.$

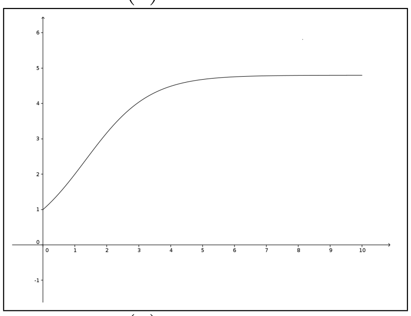
Pour chaque équation différentielle ci-dessus, une solution (associée à une certaine condition initiale et un intervalle) a été représentée ci-dessous. Il y a donc 6 représentations graphiques.



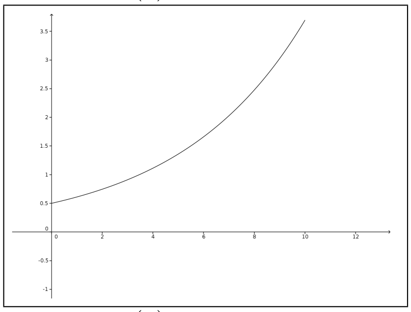
(1)



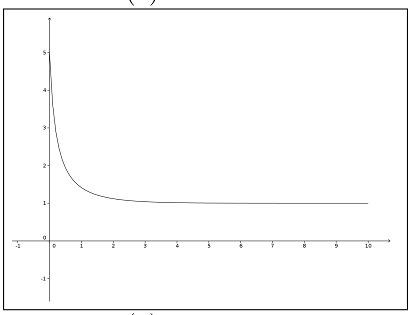
(2)



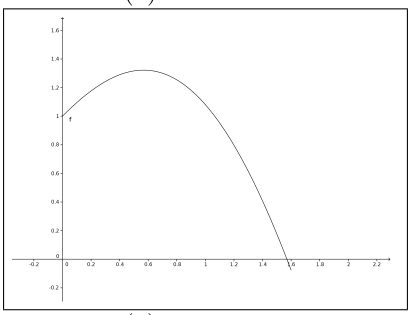
(3)



(4)



(5)



(6)

Le but est d'associer chaque représentation graphique à son équation différentielle.

Essayer de varier les plaisirs pour ne pas utiliser la même démarche à chaque fois : résoudre mathématiquement certaines équations, et pour les autres, utiliser la méthode d'Euler.