Corrigé du devoir maison 1

Question préliminaire :
Poser la fonction $h(x) = e^x - (1+x)$ et faire son TV sur $\mathbb{R}^+$ en remarquant que $h(0) = 0$.

Partie 1

1. pour $t > 0$, $g'(t) = \frac{-a/t^2}{1+a/t} + \frac{a}{(t+a)^2} = \frac{-a}{t(t+a)} + \frac{a}{(t+a)^2} = \frac{-a^2}{t(t+a)^2} < 0$ donc g est strictement décroissante. Or $g(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On trouve que pour tout $t > 0$, $f'(t) = \ln(1+\frac{t}{a}) + t \times \frac{-a/t^2}{1+\frac{a}{t}} = \ln(1+\frac{t}{a}) + \frac{-a/t}{\frac{t+a}{t}} = \ln(1+\frac{t}{a}) + \frac{-a}{t+a} = g(t)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = f(n)$, donc par croissance de f : $n \leq n+1 \Rightarrow f(n) \leq f(n+1) \Rightarrow v_n \leq v_{n+1}$ et la suite v est croissante. Puis par croissance de l'exponentielle, on obtient $e^{v_n} \leq e^{v_{n+1}}$ soit $u_n \leq u_{n+1}$.

Partie 2

1. Au bout d'un an, on dispose de la somme $S + S * r = S(1+r)$.
2. Après une période, on dispose de $S_1 = S(1+\frac{r}{n})$, que l'on replace au taux r/n, donc après deux périodes, on obtient la somme $S_2 = S_1(1+\frac{r}{n}) = S(1+\frac{r}{n})^2$. D'où après les n périodes (donc 1 an), la somme est $S_n = S(1+\frac{r}{n})^n$. D'après la partie 1, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $S{*}e^r$ et d'après la question préliminaire, $S{*}e^r \geq S(1+r)$.

Corrigé du devoir maison 1

Question préliminaire :
Poser la fonction $h(x) = e^x - (1+x)$ et faire son TV sur $\mathbb{R}^+$ en remarquant que $h(0) = 0$.

Partie 1

1. pour $t > 0$, $g'(t) = \frac{-a/t^2}{1+a/t} + \frac{a}{(t+a)^2} = \frac{-a}{t(t+a)} + \frac{a}{(t+a)^2} = \frac{-a^2}{t(t+a)^2} < 0$ donc g est strictement décroissante.
Or $g(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On trouve que pour tout $t > 0$, $f'(t) = \ln(1+\frac{t}{a}) + t \times \frac{-a/t^2}{1+\frac{a}{t}} = \ln(1+\frac{t}{a}) + \frac{-a/t}{\frac{t+a}{t}} = \ln(1+\frac{t}{a}) + \frac{-a}{t+a} = g(t)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = f(n)$, donc par croissance de f : $n \leq n+1 \Rightarrow f(n) \leq f(n+1) \Rightarrow v_n \leq v_{n+1}$ et la suite v est croissante. Puis par croissance de l'exponentielle, on obtient $e^{v_n} \leq e^{v_{n+1}}$ soit $u_n \leq u_{n+1}$.

Partie 2

1. Au bout d'un an, on dispose de la somme $S + S * r = S(1+r)$.
2. Après une période, on dispose de $S_1 = S(1+\frac{r}{n})$, que l'on replace au taux r/n, donc après deux périodes, on obtient la somme $S_2 = S_1(1+\frac{r}{n}) = S(1+\frac{r}{n})^2$. D'où après les n périodes (donc 1 an), la somme est $S_n = S(1+\frac{r}{n})^n$. D'après la partie 1, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $S{*}e^r$ et d'après la question préliminaire, $S{*}e^r \geq S(1+r)$.

Corrigé du devoir maison 1

Question préliminaire :
Poser la fonction $h(x) = e^x - (1+x)$ et faire son TV sur $\mathbb{R}^+$ en remarquant que $h(0) = 0$.

Partie 1

1. pour $t > 0$, $g'(t) = \frac{-a/t^2}{1+a/t} + \frac{a}{(t+a)^2} = \frac{-a}{t(t+a)} + \frac{a}{(t+a)^2} = \frac{-a^2}{t(t+a)^2} < 0$ donc g est strictement décroissante. Or $g(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On trouve que pour tout $t > 0$, $f'(t) = \ln(1+\frac{t}{a}) + t \times \frac{-a/t^2}{1+\frac{a}{t}} = \ln(1+\frac{t}{a}) + \frac{-a/t}{\frac{t+a}{t}} = \ln(1+\frac{t}{a}) + \frac{-a}{t+a} = g(t)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = f(n)$, donc par croissance de f : $n \leq n+1 \Rightarrow f(n) \leq f(n+1) \Rightarrow v_n \leq v_{n+1}$ et la suite v est croissante. Puis par croissance de l'exponentielle, on obtient $e^{v_n} \leq e^{v_{n+1}}$ soit $u_n \leq u_{n+1}$.

Partie 2

1. Au bout d'un an, on dispose de la somme $S + S * r = S(1+r)$.
2. Après une période, on dispose de $S_1 = S(1+\frac{r}{n})$, que l'on replace au taux r/n, donc après deux périodes, on obtient la somme $S_2 = S_1(1+\frac{r}{n}) = S(1+\frac{r}{n})^2$. D'où après les n périodes (donc 1 an), la somme est $S_n = S(1+\frac{r}{n})^n$. D'après la partie 1, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $S{*}e^r$ et d'après la question préliminaire, $S{*}e^r \geq S(1+r)$.