Corrigé du mini devoir maison 13

Exercice 1: `début edhec S 2013`

1. (a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{a_n}$. On en déduit que $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{N+1}$ [somme télescopique] $\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Donc la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et sa somme vaut 1 : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}=1$.

   (b) $a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)[2n+4]=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
   D'où $u_n=\frac{n}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

   (c) On utilise la même astuce qu'au a) pour se ramener à une somme télescopique : $u_n=3[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}]$.
   D'où $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N}u_n=3\sum_{n=2}^{N+1}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=3(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{2}$. La série de terme général u_n converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$: $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{3}{2}$. Comme $\frac{3}{2}<2$, on obtient bien $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

2. (a) Au choix `function y=fact(n), y=prod(1:n), endfunction` ou avec une boucle for :
   `x=1; for k=1:n, x=x*k, end, y=x`
   Puis le script : `n=input('entrer un entier non nul'); denom=1;`
   `for k=2:n, denom = denom + fact(k), end;`
   `u=n/denom; disp(u)`

   (b) D'après le cours la série exponentielle de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc en particulier pour $x=1$. (On rappelle que la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes).
   De plus $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-1=e-1$.

   (c) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1!+2!+...+n!\geq n!$ d'où $u_n\leq\frac{n}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}$.

   (d) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{(n-1)!}$ et la série de terme général $\frac{1}{(n-1)!}$ converge (au besoin, faire un changement d'indice : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}$ et on reconnaît la série exponentielle).
   Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_n converge, et que $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}$. Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leq e$.
   On conclut en remarquant que $e\leq 2e-2=2(e-1)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

Exercice 2: `inspiré d'esc S 2002`

1. Rappel : pour $a\geq 0$, $|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a$.
   Il faut donc montrer que $-(x^2+y^2)\leq 2xy\leq x^2+y^2$. Le côté droit vient de $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geq 0$ et le côté gauche de $2xy+x^2+y^2=(x+y)^2\geq 0$.
   Ou séparer deux cas : soit $xy\geq 0$ alors $|xy|=xy$ et le résultat à montrer est $x^2+y^2\geq 2xy\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0$ ce qui est vrai puisque $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$.
   soit $xy\leq 0$, alors $|xy|=-xy$ et le résultat à montrer est $x^2+y^2\geq -2xy\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy\geq 0$ ce qui est vrai puisque $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$.
   Une dernière méthode consiste à remarquer que $x^2=|x|^2$ et $y^2=|y|^2$ et à partir de $(|x|-|y|)^2\geq 0$, d'où $|x|^2+|y|^2-2|x||y|\geq 0$ ...
2. $a_n^2=\frac{(x^n)^2}{n!}=\frac{x^{2n}}{n!}=\frac{(x^2)^n}{n!}$. Donc la série de terme général a_n^2 est la série exponentielle en x^2 donc converge (et sa somme vaut e^{x^2}). Donc $a\in E$.
3. D'après la question préliminaire, $|a_nb_n|\leq\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$. Or les séries de terme général a_n^2 et b_n^2 convergent (puisque a et b sont des éléments de E) donc par somme, la série de terme général $\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$ converge.
   D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $|a_nb_n|$ converge, càd que la série de terme général (a_nb_n) converge absolument.
4. $E\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle est élement de E (puisque $0^2=0$ et la série nulle converge).
   Soit a et b, deux suites de E et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que la suite $\lambda a+b\in E$, càd que la série de terme général $(\lambda a_n+b_n)^2$ converge.
   Or $(\lambda a_n+b_n)^2=\lambda^2a_n^2+b_n^2+2\lambda a_nb_n$. On sait que les séries de terme général $\lambda^2a_n^2$ et b_n^2 convergent (car $a,b\in E$).
   De plus, d'après la question précédente, on obtient que la série de terme général $2\lambda a_nb_n$ converge absolument donc converge. Par somme, la série de terme général $(\lambda a_n+b_n)^2$ converge et $\lambda a+b\in E$.
   E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.