Corrigé du devoir maison 14

Exercice 1 : `Edhec S 2005`

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{E,\bar{E}\}$,
$P(U_1\cap...\cap U_n)=P(E)P_E(U_1\cap...\cap U_n)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(U_1\cap...\cap U_n)$.
Or une fois le jeton choisi, les lancers sont mutuellement indépendants (autrement dit, les événements (U_k) sont mutuellement indépendants pour la probabilité P_E resp. $P_{\bar{E}}$)
d'où $P(U_1\cap...\cap U_n)=\frac{1}{2}(P_E(U_1)...P_E(U_n))+\frac{1}{2}(P_{\bar{E}}(U_1)...P_{\bar{E}}(U_n))=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2}\times 1=(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}$.

2. On cherche $P_{U_1\cap...\cap U_n}(E)$. D'après la formule de Bayes, $P_{U_1\cap...\cap U_n}(E)=\frac{P(E)P_E(U_1\cap...\cap U_n)}{P(U_1\cap...\cap U_n)}=\frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^{n+1}+\frac{1}{2}}\to 0$ car $|1/2|<1$. Effectivement, on a vu (notamment avec le théorème de limite monotone) que lorsqu'on utilise un jeton où les deux faces sont possibles la probabilité d'obtenir toujours l'une (càd jamais l'autre) est nulle.

3. $X(\Omega)=\{0\}\cup[\![1,+\infty[\![$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(X=n)=U_1\cap...\cap U_{n-1}\cap\overline{U}_n$. On réapplique la formule des probabilités totales : $P(X=n)=P(U_1\cap...\cap U_{n-1}\cap\overline{U}_n)=P(E)P_E(U_1\cap...\cap U_{n-1}\cap\overline{U}_n)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(U_1\cap...\cap U_{n-1}\cap\overline{U}_n)$ et par indépendance des lancers, une fois le jeton choisi, on obtient $P(X=n)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n+0=(\frac{1}{2})^{n+1}$.

4. $\{(X=n),n\in\mathbb{N}\}$ est un s.c.e d'où $P(X=0)=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P(X=n)=1-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n=1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
D'où $P(X=0)=P(\bar{E})$, ce qui est prévisible puisque qu'on "sait" qu'avec le jeton 1, presque sûrement, on va tomber sur la face 0 en un nombre fini de lancers. (donc X ne prendra pas la valeur 0 p.s.)

5. Il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 0}nP(X=n)$ ce qui revient à la convergence, car tous les termes sont positifs. Posons $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}kP(X=k)$. Alors $S_n=0+\sum\limits_{k=1}^{n}k(\frac{1}{2})^{k+1}=(\frac{1}{2})^2\sum\limits_{k=1}^{n}k(\frac{1}{2})^{k-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}(\frac{1}{2})^2\frac{1}{(1-1/2)^2}=1$ (série géométrique dérivée convergente car $|1/2|<1$). Donc X admet une espérance et $E(X)=1$.

6. Etudions le moment d'ordre 2 de X : pour cela, il faut étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}n^2P(X=n)$.
Posons $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k^2P(X=k)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2P(X=k)$. Alors $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}[k(k-1)+k]P(X=k)=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)(\frac{1}{2})^{k+1}+S_n$
$=0+(\frac{1}{2})^3\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)(\frac{1}{2})^{k-2}+S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}(\frac{1}{2})^3\dfrac{2}{(1-1/2)^3}+E(X)=2+1=3$
Donc X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2)=3$.
Donc X admet une variance et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=3-1=2$.

7. Sachant $\bar{E}$, Y prend la valeur 1 avec probabilité 1 donc la valeur 1 est particulière.
D'après la formule des probabilités totales (toujours la même!),
$P(Y=1)=P(U_1)=P(E)P_E(U_1)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(U_1)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}$.
Puis $\forall n\geq 2$, $(Y=n)=\overline{U}_1\cap...\cap\overline{U}_{n-1}\cap U_n$ d'où $P(Y=n)=P(E)P_E(\overline{U}_1\cap...\cap\overline{U}_{n-1}\cap U_n)+0=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$ par indépendance des lancers une fois le jeton choisi.

8. Comme précédemment, $P(Y=0)=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P(Y=n)=1-\frac{3}{4}-\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

9. Etude de la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geq 0}nP(Y=n)$ donc de la convergence.
On a $\sum\limits_{k=0}^{n}kP(Y=k)=0+\frac{3}{4}+\sum\limits_{k=2}^{n}k(\frac{1}{2})^{k+1}=\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2[\sum\limits_{k=1}^{n}k(\frac{1}{2})^{k-1}-1]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{4}+\frac{1}{4}[\frac{1}{(1-1/2)^2}-1]=\frac{3}{4}+1-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$.
Donc Y admet une espérance et $E(Y)=\frac{3}{2}$.

10. D'après la formule de transfert, il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 0}n(n-1)P(Y=n)$, ce qui revient à la convergence. Or $\sum\limits_{k=0}^{n}k(k-1)P(Y=k)=0+\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)(\frac{1}{2})^{k+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}(\frac{1}{2})^3\frac{2}{(1-1/2)^3}=2$. Donc la variable $Y(Y-1)$ admet une espérance et $E(Y(Y-1))=2$.

11. a) `2*rand()` fournit un réel entre 0 et 2 de manière uniforme, donc `floor(2*rand())` fournit 0 ou 1 avec équiprobabilité (`floor` est la partie entière).
Fonctionnement du programme : `x` est une variable compteur, `jeton` cache le jeton que l'on choisit : 1 donne le jeton J_1 et 2 le jeton J_2. Puis si le jeton J_1 a été choisi, on lance une première fois ce jeton ... et on le relance tant qu'on n'a pas obtenu la face 0 : ce qui donne la valeur de X dans ce cas.
Sinon (si le jeton J_2 a été choisi), on ne modifie pas `x`, qui renvoie alors la valeur 0 ... ce qui est également la valeur de X dans ce cas (puisqu'avec le jeton J_2, il est impossible d'obtenir la face 0, donc par définition, X prend la valeur 0). Bref, ce programme simule la loi de X !
b) Non on n'est pas certain que le nombre de passages dans la boucle `while` soit fini, mais quasi-certain !, puisque la probabilité de ne jamais obtenir la face 0 en jetant le jeton J_1 est nulle.
c) Garder la syntaxe en remplaçant `x` par `y`, ainsi que `while lancer <>0` par `while lancer <>1` et en ajoutant `else y=1` avant le dernier `end`.

Exercice 2 `extrait d'Edhec S 2006`

1. D'après l'énoncé, comme le mobile est en 0 à l'instant 0, à l'instant 1, il sera sur le point d'abscisse 0+1=1 avec probabilité $\frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec probabilité $\frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$.
   D'où $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 0) = \frac{1}{2} = P(X = 1)$.
2. Cas $n = 0$ d'après l'énoncé le mobile est en 0 à l'instant 0 donc $X_0(\Omega) = \{0\}$.
   Supposons que pour un entier n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$. Donc X_n peut prendre toutes les valeurs $k \in [\![0, n]\!]$: or d'après l'énoncé, si X_n prend la valeur k, alors à l'instant $n+1$, le mobile est en $k+1$ ou en 0 avec une probabilité non nulle. D'où $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k + 1, k \in [\![0, n]\!]\} = \{0, 1, ..., n + 1\}$.
3. Soit k entier non nul. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{(X_{n-1} = j), j \in [\![0, n - 1]\!]\}$ est un s.c.e. donc d'après la formule des probabilités totales, $P(X_n = k) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j)P_{X_{n-1}=j}(X_n = k)$. Mais au vu du déplacement du mobile, une seule de ces probabilités conditionnelles est non nulle, car pour arriver au point d'abscisse k ($k \neq 0$), le mobile a du venir par le point d'abscisse $k - 1$ (en effet, soit le mobile retourne en 0, soit il se déplace d'un pas sur la droite). D'où $P(X_n = k) = 0 + P(X_{n-1} = k - 1)P_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k) = P(X_{n-1} = k - 1)\frac{k-1+1}{k-1+2} = P(X_{n-1} = k - 1)\frac{k}{k+1}$.
   Ou remarquer directement que $(X_n = k) = (X_{n-1} = k - 1) \cap (X_n = k)$. Mais attention de bien le justifier !
4. X_n est une variable finie donc admet une espérance.
   Plusieurs pistes possibles : soit on somme la relation obtenue précédemment (à partir de $k = 1$ car k doit être non nul) et on fait apparaître les espérances : $\sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1)P(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X_{n-1}(= k - 1)$
   $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X_n = k) + \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_n = k) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X_{n-1} = j) \Leftrightarrow [E(X_n) - 0] + [1 - P(X_n = 0)] = \sum\limits_{j=0}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + \sum\limits_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j) \Leftrightarrow E(X_n) + 1 - P(X_n = 0) = E(X_{n-1}) + 1 \Leftrightarrow E(X_n) - P(X_n = 0) = E(X_{n-1})$
   soit on part de $E(X_n)$ et on fait apparaître une somme avec le membre de gauche de la relation (attention il faut $k \neq 0$ pour pouvoir l'utiliser !) :
   $E(X_n) = 0 + \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1)P(X_n = k) - \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X_{n-1} = k - 1) - [\sum\limits_{k=0}^{n} P(X_n = k) - P(X_n = 0)] = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X_{n-1} = j) - 1 + P(X_n = 0) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + \sum\limits_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j) - 1 + P(X_n = 0) = E(X_{n-1}) + 1 - 1 + P(X_n = 0) = E(X_{n-1}) + P(X_n = 0)$.
5. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(T = k)$ signifie que le mobile n'est pas revenu en 0 avant l'instant k donc qu'il s'est déplacé vers la droite tout ce temps, et qu'à l'instant k, il est retourné en 0 d'où
   $(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap ... \cap (X_{k-1} = k - 1) \cap (X_k = 0)$.
   b) D'après la formule des probabilités composées,
   $P(T = k) = P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 2) \times ... \times P_{(X_1=1)\cap...\cap(X_{k-2}=k-2)}(X_{k-1} = k-1) \times P_{(X_1=1)\cap...\cap(X_{k-1}=k-1)}(X_k = 0)$
   $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \times \frac{k-2+1}{k-2+2} \times \frac{1}{k-1+2} = \frac{1}{k(k+1)}$ (produit télescopique)
   c) $T(\Omega) = \mathbb{N}$ d'où $\{(T = k), k \in \mathbb{N}\}$ est un s.c.e. et $P(T = 0) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ d'où $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$ (somme télescopique) $\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Finalement, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ et $P(T = 0) = 0$.
   Presque sûrement, le mobile retourne en 0 en un nombre fini d'étapes ; autrement dit, l'événement "le mobile ne retourne jamais en 0" est négligeable.
   d) il faut étudier la convergence absolue (ce qui revient à la convergence car tous les termes sont positifs) de la série $\sum\limits_{n\geq1} nP(Y = n) = \sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n+1}$. Or la série harmonique diverge, donc cette série diverge, et Y n'admet pas d'espérance.