

Corrigé du devoir maison 3

Exercice 1:

1. Posons $T = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$, et introduisons $S = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ et $V = S + iT$.

$$\text{Alors } V = \sum_{k=0}^n e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^n \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{\pi}{n}} \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n+1}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \text{ car } e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1 \text{ (puisque } n \geq 2).$$

$$\text{D'où } V = e^{i\frac{\pi}{n}} \frac{1 - e^{i\frac{2\pi(n+1)}{n}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = e^{i\frac{\pi}{n}} \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \text{ (car } e^{i2\pi} = 1), \text{ et finalement } V = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

On en déduit que $T = \operatorname{Im}(V) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

2. Rappel : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$.

$$\text{Donc } S = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} e^{ikx} = 0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (e^{ix})^k = ne^{ix} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (e^{ix})^j = ne^{ix} (e^{ix} + 1)^{n-1}$$

(binôme de Newton).

Il reste à donner la forme algébrique de S : pour cela, factorisons par l'angle moitié.

$$S = ne^{ix} [e^{ix/2} (e^{ix/2} + e^{-ix/2})]^{n-1} = ne^{ix} (e^{ix/2})^n (2\cos(x/2))^{n-1} = n2^n (\cos(x/2))^n e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$$

$$\text{Finalement, } S = n2^n (\cos(x/2))^n \cos((n+1)x/2) + i n2^n (\cos(x/2))^n \sin((n+1)x/2).$$

Exercice 2:

1. (a) Par récurrence : *hérédité* soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n < 1$ alors par st. croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ $0 \leq u_n^2 < 1$ d'où $1 \leq u_n^2 + 1 < 2$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2 + 1}{2} < 1$. Donc $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$.

- (b) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$. La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge donc vers une limite finie ℓ . Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ (car $u_n \rightarrow \ell$ et $u_{n+1} \rightarrow \ell$), on obtient $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$. D'où ... $\ell = 1$.

2. (a) FI $\infty - \infty$: il faut donc transformer l'expression.

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{1 - \frac{u_n^2 + 1}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - (1 + u_n)}{1 - u_n^2} = \frac{1 - u_n}{1 - u_n^2} = \frac{1}{1 + u_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

- (b) On applique le résultat du début avec $a_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{1}{2}$: alors on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) = \frac{1}{2}. \text{ Or } \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \text{ (somme télescopique)} = \frac{1}{v_n} - 1 \text{ (car } u_0 = 0).$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - 1 \right) = \frac{1}{2} \text{ càd } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}. \text{ Finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n = 2.$$

3. `n=input('entrer un entier positif n')`

`u=0;`

`for i=1:n`

`u=(u^2+1)/2`

`end`

`disp(u)`