Devoir à la maison 1

à rendre le mercredi 11 septembre 2013

Question préliminaire :
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1+x \leq e^x$.

Partie 1

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif.

1. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t) = \ln(1+\frac{a}{t}) - \frac{a}{t+a}$.
   (a) Donner le tableau de variations complet de g.
   (b) En déduire le signe de g.
2. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = t\ln(1+\frac{a}{t})$.
   En exprimant f' en fonction de g, dresser le tableau de variations de f. (On ne précisera pas les limites).
3. On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1+\frac{a}{n})^n$ et $v_n = \ln u_n$.
   A l'aide de la fonction f, déterminer la monotonie de la suite (v_n) puis de la suite (u_n).
   On admettra pour la deuxième partie que u_n tend vers e^a lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 2 (pour apprendre à lire un énoncé)

On considère une somme d'argent S que l'on place de deux façons différentes.

1. On place S durant une année à un taux d'intérêt annuel $r > 0$.
   De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
2. On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et on place S durant une année à un taux d'intérêt égal à $\frac{r}{n}$ pour chacune de ces périodes. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
   Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$, et comparer avec le placement précédent.

Devoir à la maison 1

à rendre le mercredi 11 septembre 2013

Question préliminaire :
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1+x \leq e^x$.

Partie 1

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif.

1. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t) = \ln(1+\frac{a}{t}) - \frac{a}{t+a}$.
   (a) Donner le tableau de variations complet de g.
   (b) En déduire le signe de g.
2. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = t\ln(1+\frac{a}{t})$.
   En exprimant f' en fonction de g, dresser le tableau de variations de f. (On ne précisera pas les limites).
3. On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1+\frac{a}{n})^n$ et $v_n = \ln u_n$.
   A l'aide de la fonction f, déterminer la monotonie de la suite (v_n) puis de la suite (u_n).
   On admettra pour la deuxième partie que u_n tend vers e^a lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 2 (pour apprendre à lire un énoncé)

On considère une somme d'argent S que l'on place de deux façons différentes.

1. On place S durant une année à un taux d'intérêt annuel $r > 0$.
   De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
2. On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et on place S durant une année à un taux d'intérêt égal à $\frac{r}{n}$ pour chacune de ces périodes. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
   Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$, et comparer avec le placement précédent.