Mini Devoir à la maison 13

à rendre le jeudi 3 avril 2014

Exercice 1:

Le but de cet exercice est de montrer sur deux exemples que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge, alors la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$ converge également et de plus : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

1. Exemple 1 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n(n+1)$.
   (a) Vérifier que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
   (b) Pour tout entier n non nul, déterminer u_n en fonction de n.
   (c) Etablir la convergence de la série de terme général u_n, donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.
2. Exemple 2 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n!$.
   (a) Ecrire une fonction scilab dont l'en-tête est `function y=fact(n)` et qui renvoie $n!$.
   En déduire un script scilab qui calcule et affiche u_n lorsque n est un entier entré par l'utilisateur.
   (b) Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.
   (d) En déduire la convergence de la série de terme général u_n, puis l'inégalité demandée.

Exercice 2:

Soit E l'ensemble des suites de réels $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général a_n^2 converge.

1. Question préliminaire : Montrer que pour tous réels x et y, $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la suite a définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$, est un élément de E.
3. Montrer que si a et b sont deux suites de E, alors la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente.
4. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Mini Devoir à la maison 13

à rendre le jeudi 3 avril 2014

Exercice 3:

Le but de cet exercice est de montrer sur deux exemples que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge, alors la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$ converge également et de plus : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

1. Exemple 1 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n(n+1)$.
   (a) Vérifier que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
   (b) Pour tout entier n non nul, déterminer u_n en fonction de n.
   (c) Etablir la convergence de la série de terme général u_n, donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.
2. Exemple 2 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n!$.
   (a) Ecrire une fonction scilab dont l'en-tête est `function y=fact(n)` et qui renvoie $n!$.
   En déduire un script scilab qui calcule et affiche u_n lorsque n est un entier entré par l'utilisateur.
   (b) Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.
   (d) En déduire la convergence de la série de terme général u_n, puis l'inégalité demandée.

Exercice 4:

Soit E l'ensemble des suites de réels $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général a_n^2 converge.

1. Question préliminaire : Montrer que pour tous réels x et y, $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la suite a définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$, est un élément de E.
3. Montrer que si a et b sont deux suites de E, alors la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente.
4. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.