Devoir à la maison 14 — à rendre le jeudi 17 avril 2014

Exercice 1:

On considère deux jetons J_1, et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer). Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.

On note E l'événement " le jeton J_1 est choisi pour le jeu " et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement "le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 " .

1. Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face numérotée 1 lors des n premiers lancers.
2. Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais. On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais. On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.
4. En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?
5. Montrer que X a une espérance puis déterminer $E(X)$.
6. Montrer que X a une variance et que $V(X) = 2$.
7. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$ (penser à distinguer un cas particulier).
8. En déduire que $P(Y = 0) = 0$.
9. Montrer que Y a une espérance puis déterminer $E(Y)$.
10. Montrer que $Y(Y - 1)$ a une espérance et la déterminer.
11. On considère le script suivant en langage scilab

```
x = 0 ; jeton= floor(2*rand())+1 ;
if (jeton==1) then
       lancer = floor(2*rand()); x=x+1;
       while lancer <>0
       x=x+1; lancer = floor(2*rand());
      end
end
disp(x)
```

   (a) Rappeler ce que fait l'instruction `floor(2*rand())`, puis expliquer le fonctionnement de ce programme. Quel est le contenu de la variable `x` à la fin ?
   (b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?
   (c) Ecrire un script qui donne la valeur de la variable aléatoire Y.

Exercice 2: Plus abstrait

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe. Au départ, le mobile est au point d'abscisse 0. Puis le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\quad X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.
3. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P(X_n = k) = \dfrac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k - 1)$.
4. En remarquant que la relation obtenue ci-dessus peut s'écrire $(k + 1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k - 1)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) - P(X_n = 0) = E(X_{n-1})$.
5. On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en 0.
   (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.
   (c) En déduire que $P(T = 0) = 0$, puis interpréter ce dernier résultat.
   (d) La variable T a-t-elle une espérance ?