Devoir à la maison 15 à rendre le lundi 12 mai 2014

Exercice 1:

On note E l'espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Soit F l'ensemble des éléments f de E tels que : $f'' - 3f' + 2f = 0$
Soit F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant en outre la relation $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F et F_0 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations : $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$
   (a) Montrer que f_1 et f_2 sont des éléments de F.
   (b) Montrer alors que la famille (f_1, f_2) est libre.
3. Soit f un élément de F.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_1, a_2) de nombres réels tel que la fonction $h_{a_1,a_2} = f - a_1 f_1 - a_2 f_2$ appartienne à F_0.
   (b) Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x))$ et $g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x))$. Montrer que ces fonctions sont constantes.
   (c) En appliquant le résultat précédent, montrer que si f appartient à F_0, alors $f = 0$.
   (d) Déduire alors du (a) que (f_1, f_2) est une base de F. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit Φ l'application de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par la relation : $\Phi(f) = (f(0), f'(0))$.
   Montrer que Φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2:

1. Question de cours : rappeler l'inégalité triangulaire pour les réels, ainsi que pour les intégrales.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.
   On note $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.
3. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$. En déduire : $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.
4. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
5. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et que : $\forall x \in]0; +\infty[,\ \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.
   (On pourra écrire $\frac{1}{x}$ sous la forme d'une intégrale).
   En déduire que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
6. Soit $(x, h) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.
   (b) Établir : $\forall t \in [0; +\infty[,\quad \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.
   (c) En déduire : $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.
7. En déduire que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[,\quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$

Pour ceux qui veulent en faire plus : (les deux questions sont indépendantes)

Exercice 3:

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1. soit f l'application définie sur E qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $f(P)$ défini par : $f(P)(X) = -3XP(X) + X^2 P'(X)$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Préciser le noyau $Kerf$ de f ainsi qu'une base de $Kerf$.
   (c) Déterminer une base de 1'image Imf de f.
2. ** On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
   Soit u et g deux endomorphîsmes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.
   (a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin Ker\left(u^3\right)$.
   Montrer que la. famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.
   (b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.
   (c) Établir l'égalité $Ker\ u = Ker\,(g - id_E)$