

Exercice 1:

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$, pour $n \geq 2$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} e^{ikx}$ pour $n \geq 1$. (si besoin, commencer par calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$).
On présentera le résultat sous forme algébrique, à l'aide de la factorisation par l'angle moitié.

Exercice 2:

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a, $0 \leq u_n < 1$.
(b) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.
(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.
(b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour montrer que $nv_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.
3. Ecrire une fonction Scilab qui demande un entier n à l'utilisateur, et qui affiche la valeur de u_n .

Exercice 3:

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$, pour $n \geq 2$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} e^{ikx}$ pour $n \geq 1$. (si besoin, commencer par calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$).
On présentera le résultat sous forme algébrique, à l'aide de la factorisation par l'angle moitié.

Exercice 4:

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a, $0 \leq u_n < 1$.
(b) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.
(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.
(b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour montrer que $nv_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.
3. Ecrire une fonction Scilab qui demande un entier n à l'utilisateur, et qui affiche la valeur de u_n .