Corrigé du devoir maison 1

Exercice 1: `Esclsca S 91`

1. Attention à la rédaction ! : $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x \geq 0 \text{ et } \sqrt{1-x} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, et pour tout $y \geq 0$, $\sqrt{y} \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x} - x^2(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1-x})^2}$. Il reste à mettre le numérateur au même dénominateur :
$$f'(x) = \frac{\frac{4x(\sqrt{1-x})^2 + x^2}{2\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{4x(\sqrt{1-x})^2 + x^2}{2\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x})^2} = \frac{4x(1-x) + x^2}{2\sqrt{1-x}(1-x)} = \frac{x(4-3x)}{2\sqrt{1-x}(1-x)}.$$
4. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\sqrt{1-x}(1-x) > 0$ et $4 - 3x > 0$ donc f' est du signe de x. Doù f admet un minimum en $x = 0$ de valeur $f(0) = 0$. On retrouve que f est positive sur $\mathcal{D}_f$.
En 1^-, $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x}(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. Asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Exercice 2: `Esc E 97`

1. Poser la fonction $g(x) = x + 1 - \ln x$ (ou $\ln x - (x+1)$) pour $x > 0$. Alors $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc g admet un minimum en $x = 1$ de valeur $g(1) = 2 \geq 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x) = e^{(1+1/x)\ln x}$.
3. $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$. Attention de bien utiliser la forme exponentielle de f !
4. pour $x > 0$, $f'(x) = (-\frac{1}{x^2}\ln(x) + (1 + \frac{1}{x})\frac{1}{x})e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = \frac{-\ln x + x + 1}{x^2} e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.
5. donc par 1. $f'(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $f(x) = e^{(1+1/x)\ln x}$.
En 0^+ : $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \frac{1}{x})\ln x = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
D'où, par composée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
7. $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$ d'où l'équation de la tangente T : $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

Corrigé du devoir maison 1

Exercice 3: `Esclsca S 91`

1. Attention à la rédaction ! : $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x \geq 0 \text{ et } \sqrt{1-x} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, et pour tout $y \geq 0$, $\sqrt{y} \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x} - x^2(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1-x})^2}$. Il reste à mettre le numérateur au même dénominateur :
$$f'(x) = \frac{\frac{4x(\sqrt{1-x})^2 + x^2}{2\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{4x(\sqrt{1-x})^2 + x^2}{2\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x})^2} = \frac{4x(1-x) + x^2}{2\sqrt{1-x}(1-x)} = \frac{x(4-3x)}{2\sqrt{1-x}(1-x)}.$$
4. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\sqrt{1-x}(1-x) > 0$ et $4 - 3x > 0$ donc f' est du signe de x. Doù f admet un minimum en $x = 0$ de valeur $f(0) = 0$. On retrouve que f est positive sur $\mathcal{D}_f$.
En 1^-, $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x}(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. Asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Exercice 4: `Esc E 97`

1. Poser la fonction $g(x) = x + 1 - \ln x$ (ou $\ln x - (x+1)$) pour $x > 0$. Alors $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc g admet un minimum en $x = 1$ de valeur $g(1) = 2 \geq 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x) = e^{(1+1/x)\ln x}$.
3. $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$. Attention de bien utiliser la forme exponentielle de f !
4. pour $x > 0$, $f'(x) = (-\frac{1}{x^2}\ln(x) + (1 + \frac{1}{x})\frac{1}{x})e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = \frac{-\ln x + x + 1}{x^2} e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.
5. donc par 1. $f'(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $f(x) = e^{(1+1/x)\ln x}$.
En 0^+ : $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \frac{1}{x})\ln x = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
D'où, par composée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
7. $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$ d'où l'équation de la tangente T : $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$