Corrigé du devoir maison 11

Exercice 1 :

1. $tr(M) = 2 - 1 + 1 = 2$
2. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $N = (n_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda M + N = (\lambda m_{ij} + n_{ij})$ d'où $tr(\lambda M + N) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda m_{ii} + n_{ii}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} n_{ii} = \lambda tr(M) + tr(N)$. D'où tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Par exemple, poser M la matrice avec un coeff diagonal égal à x, et le reste nul.
   On en déduit que tr est surjective, càd que $Im(tr) = \mathbb{R}$.
4. Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f(\lambda M+N) = \lambda M+N-2tr(\lambda M+N)A = \lambda M+N-2(\lambda tr(M)+tr(N))A = M + N - 2\lambda tr(M)A - 2tr(N)A = \lambda f(M) + f(N)$.
5. a) On sait $0 \in Kerf$. Réciproquement : soit $M \in Ker(f)$. Alors $f(M) = 0$ càd $M = 2tr(M)A$ $(*)$. En appliquant tr, on obtient (par linéarité, car $\lambda = 2tr(M)$ est un scalaire) : $tr(M) = 2tr(M)tr(A)$ càd $tr(M)(1 - 2tr(A)) = 0$ soit $tr(M) = 0$ puisque $tr(A) \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 1-2tr(A) \neq 0$. En réinjectant cette information dans $(*)$, on obtient $M = 0$
   b) d'après a), f est injective, et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, f est bijective.
6. (a) $H = Ker(Tr)$, noyau d'une forme linéaire donc (cours) H est un hyperplan
   Ou utiliser 3. et le théorème du rang : $dim(H)dim(Ker(tr)) == dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - dim(Im(tr)) = n^2 - dim(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.
   Puis comme $dim(Vect(A)) = 1$ (car $A \neq 0$), on en déduit : $dim(H) + dim(Vect(A) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
   Etudions $H \cap Vect(A)$: on sait déjà $0 \in H \cap Vect(A)$. Réciproquement, soit $M \in H \cap Vect(A)$: alors $tr(M) = 0$ et M s'écrit $M = \lambda A$. On en déduit $0 = tr(M) = \lambda tr(A)$ càd $\lambda = 0$ puisque $tr(A) = \frac{1}{2} \neq 0$. D'où $M = 0$. Finalement, $H \cap Vect(A) = \{0\}$.

   (b) Soit $M = \lambda A \in Vect(A)$: alors $f(M) = f(\lambda A) = \lambda A - 2tr(\lambda A)A = \lambda A - 2\lambda tr(A)A = A - A = 0$ car $-2tr(A) = -1$. D'où $M \in Kerf$.
   Soit $M \in H$: alors $tr(M) = 0$, d'où $f(M) = M$. On en déduit bien, $M = f(M) \in Imf$.
   Pour obtenir les égalités, plusieurs rédactions possibles :
   <u>variante 1</u> : d'après les inclusions, $dim(Kerf) \geq 1$ et $dim(Imf) \geq dim(H) = n^2 - 1$. Or d'après le théorème du rang, $dim(Kerf)+dim(Imf) = n^2$. D'où nécessairement, $dim(Kerf) = 1$ et $dim(Imf) = n^2-1$ et donc (inclusion + égalité des dim implique égalité des sev), $Kerf = Vect(A)$ et $Imf = H$.
   <u>variante 2</u> : montrer $Kerf \subset Vect(A)$: soit $M \in Kerf$. Alors $f(M) = 0$ d'où $M = 2tr(M)A \in Vect(A)$ puisque $2tr(M) \in \mathbb{R}$. Montrer $Imf \subset H$: soit $M \in Imf$. Alors $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(N) = M$ càd $N - 2tr(N)A = M$. D'où $tr(N) - 2tr(N)tr(A) = tr(M)$ càd $0 = tr(M)$ et $M \in H$.

   (c) f est linéaire. Montrons que $f \circ f = f$: $\forall M$, $f \circ f(M) = f(M - 2tr(M)A) = f(M) - 2tr(M)f(A)$ [par linéarité de f] $= f(M)$ puisque $f(A) = 0$ ($A \in Kerf$ d'après b).
   Donc (th du cours), f est le projecteur sur Imf parallèlement à $Ker(f)$. On conclut avec le b).

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{n\to+\infty} \exp(-x\ln(n)) = +\infty$, donc le terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.
   De même, si $x = 0$, le terme général $(-1)^{n+1}$ diverge.
   Puisqu'une condition *nécessaire* de convergence de la série est la convergence du terme général (vers 0), si $x \in \mathbb{R}^-$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. (a) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)} - u_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \geq 0$ car $(2p+1)^x \leq (2p+2)^x$.
   $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leq 0$ car $(2p)^x \leq (2p+1)^x$.
   $u_{2p} - u_{2p-1} = \frac{-1}{(2p)^x} \to 0$, quand $p \to +\infty$.
   Donc (u_{2p}) et (u_{2p-1}) sont adjacentes, et donc elles convergent, vers une même limite, notée $S(x)$.

   (b) Attention ! le concepteur du sujet attend ici que vous redémontriez le résultat suivant : si les suites extraites (u_{2n}), et (u_{2n-1}) convergent vers une même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers cette même limite ℓ. Cette preuve nécessite la définition de la limite avec ϵ.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Comme $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = S(x)$, $\exists p_1 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_1, |u_{2p} - S(x)| \leq \varepsilon$.
   Comme $\lim_{p\to+\infty} u_{2p-1} = S(x)$, $\exists p_2 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_2, |u_{2p-1} - S(x)| \leq \varepsilon$.
   Prenons $n_0 = max(2p_1, 2p_2 - 1)$. Soit $n \geq n_0$.

Si n est pair, n s'écrit $n = 2p$ avec $p \geq p_1$ donc $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.
Si n est impair, n s'écrit $n = 2p - 1$ avec $p \geq p_2$ donc $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.
Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.

(c) Ainsi, (via la définition avec les ϵ), u converge vers $S(x)$, et comme u est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, cette série converge.

(d) Comme (u_{2p}) est croissante de limite $S(x)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leq S(x)$.
Comme (u_{2p-1}) est décroissante de limite $S(x)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si n est pair, écrivons $n = 2p$. Par (d), $u_n \leq S(x) \leq u_{n+1}$.
Donc $0 \leq S(x) - u_n \leq u_{n+1} - u_n$, et comme $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^x}$, on obtient : $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
Si n est impair, écrivons $n = 2p - 1$. Par (d), $u_{n+1} \leq S(x) \leq u_n$.
Donc $0 \geq S(x) - u_n \geq u_{n+1} - u_n$, et comme $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^x}$, en passant à la valeur absolue, $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
Dans tous les cas, $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

(f)
```
function s=serie(x,e)
  n=1
  s=1
  while (1/(n+1)^x)>e then
  n=n+1
  s=s+(-1)^(n+1)/(n^x)
  end
endfunction
```

3. L'idée est la suivante : comme $(-1)^{k+1}$ vaut -1 si k pair, et 1 si k impair, pour obtenir la somme voulue, il suffit d'ajouter tous les termes d'indice k impair, et de retrancher tous les termes d'indice k pair.
D'où $S = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{pair}}}^{2p} \frac{-1}{k^x} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{impair}}}^{2p} \frac{1}{k^x}$.
Or, $k \in [\![1, 2p]\!]$ pair s'écrit : $k = 2i$, avec $i \in [\![1, p]\!]$ et $k \in [\![1, 2p]\!]$ impair s'écrit $k = 2i - 1$ avec $i \in [\![1, p]\!]$. Finalement, on obtient $S = \sum_{i=1}^{p} \frac{-1}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x}$. On conclut en remarquant $(2i)^x = 2^x i^x$.
Pour la deuxième partie, on refait le même raisonnement sur $\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x}$ en séparant les termes d'indice pair et impair : $\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x}$ d'où $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i)^x}$. On conclut en remarquant que $2 \times \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^{x-1}}$.

4. (a) La seconde relation de 3. donne, avec $x = 1$,
$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$, puis en posant $k = j + n$
$v_n = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{n+j} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n\big(1 + (k/n)\big)} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + (k/n)}$.

(b) On reconnaît dans cette dernière expression la somme de Riemann d'ordre n de la fonction continue f : $[0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Par continuité de f, le théorème des sommes de Riemann assure que v converge et que : $S(1) = \lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)dt = [\ln|1 + x|]_0^1 = \ln(2)$.

5. La question 3. avec $x = 2$ donne $u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^2}$.
En passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$,
$S(2) = \lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{12}$.