Corrigé du devoir maison 3

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc f admet un minimum strict en $x = 1$ de valeur 1. En particulier, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f(x) > 1$.
   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, et en $+\infty$, $f(x) = x(1 - \frac{\ln x}{x}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. Pour $x > 0$, $f(x) - x = -\ln x$. Faire alors le tableau de signe.
3. On remarque que $f(1) = 1$ donc si $a = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ et la suite est constante.
4. a) *Cas n=0* : $u_0 = a > 1$. Supposons que pour un certain n, u_n existe et $u_n > 1$. Alors $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. Puis, vu le TV de f, on obtient $u_{n+1} = f(u_n) > 1$. *Ccl.*
   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ d'après 2. en $x = u_n > 1$.
   c) La suite u est décroissante et minorée par 1, donc converge. Soit l sa limite. Par a), on obtient $l \geq 1$, puis en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$ on obtient : $l = l - \ln l \Leftrightarrow \ln l = 0 \Leftrightarrow l = 1$.
5. Comme $0 < u_0 = a < 1$, on en déduit (TV de f), que $u_1 = f(u_0) > 1$. Donc on peut appliquer le résultat de 4. à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour les sceptiques, poser v la suite définie par : $v_0 = u_1 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$. La suite v vérifie toutes les conditions requises dans la question 4. ! Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 1. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. (ce n'est pas le premier terme d'une suite qui modifie sa convergence ! Par contre attention la suite u n'est plus décroissante puisque $u_0 = a < 1 < u_1$. Ce n'est que la suite partant de $n = 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui est décroissante ....)
6. $\ln(p_n) = \ln(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1})$, puisque d'après la définition de la suite pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k - \ln(u_k)$ càd $\ln(u_k) = u_k - u_{k+1}$. On reconnaît une somme télescopique (l'écrire sous forme développée sans le symbole $\sum$), d'où $\ln(p_n) = u_0 - u_{n+1} = a - u_{n+1}$.

   On obtient $p_n = e^{\ln(p_n)} = e^{a - u_{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{a-1}$.

Corrigé du devoir maison 3

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc f admet un minimum strict en $x = 1$ de valeur 1. En particulier, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f(x) > 1$.
   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, et en $+\infty$, $f(x) = x(1 - \frac{\ln x}{x}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. Pour $x > 0$, $f(x) - x = -\ln x$. Faire alors le tableau de signe.
3. On remarque que $f(1) = 1$ donc si $a = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ et la suite est constante.
4. a) *Cas n=0* : $u_0 = a > 1$. Supposons que pour un certain n, u_n existe et $u_n > 1$. Alors $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. Puis, vu le TV de f, on obtient $u_{n+1} = f(u_n) > 1$. *Ccl.*
   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ d'après 2. en $x = u_n > 1$.
   c) La suite u est décroissante et minorée par 1, donc converge. Soit l sa limite. Par a), on obtient $l \geq 1$, puis en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$ on obtient : $l = l - \ln l \Leftrightarrow \ln l = 0 \Leftrightarrow l = 1$.
5. Comme $0 < u_0 = a < 1$, on en déduit (TV de f), que $u_1 = f(u_0) > 1$. Donc on peut appliquer le résultat de 4. à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour les sceptiques, poser v la suite définie par : $v_0 = u_1 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$. La suite v vérifie toutes les conditions requises dans la question 4. ! Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 1. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. (ce n'est pas le premier terme d'une suite qui modifie sa convergence ! Par contre attention la suite u n'est plus décroissante puisque $u_0 = a < 1 < u_1$. Ce n'est que la suite partant de $n = 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui est décroissante ....)
6. $\ln(p_n) = \ln(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1})$, puisque d'après la définition de la suite pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k - \ln(u_k)$ càd $\ln(u_k) = u_k - u_{k+1}$. On reconnaît une somme télescopique (l'écrire sous forme développée sans le symbole $\sum$), d'où $\ln(p_n) = u_0 - u_{n+1} = a - u_{n+1}$.

   On obtient $p_n = e^{\ln(p_n)} = e^{a - u_{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{a-1}$.