Corrigé du devoir maison 4

Exercice 1 :

1. Analyse : soit P un polynôme qui convient. Alors 1,2,3 étant racines de P, $(X-1)(X-2)(X-3)$ divise P donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)Q(X)$. Comme 3$= deg(P) = 3 + deg(Q)$, on en déduit $deg(Q) = 0$ donc Q est un polynôme constant : $Q(X) = c$. On utilise alors $P(4) = 1$ pour obtenir $c = \frac{1}{3!}$.
   Finalement, il y a au plus une solution : $P(X) = \frac{1}{3!}(X-1)(X-2)(X-3)$.
   Synthèse immédiate : on vérifie qu'avec P le polynôme précédent, $P(1) = 0 = P(2) = P(3)$ et $P(4) = 1$.
   Conclusion : unique polynôme solution $P(X) = \frac{1}{3!}(X-1)(X-2)(X-3)$.
2. (a) Analyse : soit P un polynôme qui convient. Alors $a_1, a_2, ..., a_n$ étant racines de P, $(X-a_1)(X-a_2)...(X-a_n)$ divise P donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-a_1)(X-a_2)...(X-a_n)Q(X)$. Comme $n = deg(P) = n + deg(Q)$, on en déduit $deg(Q) = 0$ donc Q est un polynôme constant : $Q(X) = c$.
   Donc P s'écrit $P(X) = c(X-a_1)(X-a_2)...(X-a_n) = c\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$. On utilise alors $P(a_0) = 1$: on obtient $c(a_0-a_1)(a_0-a_2)...(a_0-a_n) = 1$ et comme $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k \neq a_0$, $c = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(a_0-a_k)}$.
   Finalement, il y a au plus une solution : $L_0(X) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(a_0-a_k)}\prod_{k=1}^{n}(X-a_j)$.
   Synthèse immédiate : on vérifie qu'avec L_0 le polynôme précédent, $L_0(a_1) = 0 = L_0(a_2) = ... = L_0(a_n)$ et $L_0(a_0) = 1$.
   Conclusion : unique polynôme solution $L_0(X) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(a_0-a_k)}\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$.

   (b) On trouve $L_k(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(X-a_j)$

Exercice 2 : `inspiré d'Escp E 96`

1. En 1, $f(1) = 1 \geq 0$ et pour $x \neq 1$, faire un tableau de signe : $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ ...
   ccl : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$.
2. Continuité au point 1 : montrer que pour $x \neq 1$, $f(x) \underset{x\to 1}{\to} f(1) = 1$. F.I. $\frac{0}{0}$ au point 1
   Donc on pose $h = x - 1 \to 0$. On a : $f(x) = \frac{h+2}{2} \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}$. Or $\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 1$ donc $f(x) \underset{x\to 1}{\to} 1 = f(1)$.
   En 0 :$\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{2}$ et $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\underset{x\to 0}{lim} f(x) = +\infty$ et la courbe admet une asymptote verticale (pas de prolongement en 0).
3. $f'(x) = ... = \frac{(x^2-1)/x - 2\ln(x)}{2(x-1)^2} = -\frac{x-1/x-2\ln(x)}{2(x-1)^2} = \frac{g(x)}{2(x-1)^2}$
4. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$. Donc g est croissante sur $]0, +\infty[$. Comme $g(1) = 0$, on obtient que $\forall x \in]0, 1]$, $g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
5. Donc (le signe de f' étant celui de g), f est croissante sur $]1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1[$. En particulier, $\forall x \neq 1$, $f(x) > 1$. En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{2}\frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
6. Poser $h(x) = (x-1) - \ln(x)$ (ou $\ln(x) - (x-1)$) et faire son tableau de variations.
   Puis comme $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} < \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$ et
   $\frac{x+1}{2} - x = \frac{1-x}{2} < 0$ car $x > 1$ donc $\frac{x+1}{2} < x$ et $f(x) < x$.

8 (a) Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n > 1$" .
   Pour $n = 0$, $u_0 = a > 1$. Supposons que pour un certain $n \geq 0$ u_n existe et $u_n > 1$.
   Montrons que u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 1$. Or $u_n > 1 > 0$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe
   et d'après le TV de f, $u_{n+1} > 1$, puisque f admet un minimum strict en 1. *Ccl.*

   (b) D'après la question 6. en $x = u_n > 1$, on obtient $f(u_n) < u_n$ càd $u_{n+1} < u_n$.

   (c) La suite u, décroissante et minorée par 1, converge. Soit l sa limite. D'après la question 8.(a), on sait que $l \in [1, +\infty[$, et par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (f continue ...), on obtient $l = f(l)$. Or si $l > 1$, alors $f(l) < l$ donc $l \neq f(l)$, donc $l = 1$.