

Corrigé du devoir maison 7

Exercice 12 Feuille 13 : Intégrales de Wallis

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\cos t - 1) dt \leq 0$. En effet, $0 < 1$, et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t \geq 0$ donc $(\cos t)^n \geq 0$ et $\cos t - 1 \leq 0$.

De plus, pour les mêmes raisons que ci-dessus, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \geq 0$.

Donc la suite décroissante et minorée par 0 converge.

2. IPP sur W_{n+2} . Premières tentatives : $u' = 1$ et $v = (\cos t)^{n+2}$ ou $u' = (\cos t)^2$ et $v = (\cos t)^n$ Ne marchent pas. Astuce : écrire $(\cos t)^{n+2} = \cos t (\cos t)^{n+1}$ et poser $u' = \cos t$ et $v = (\cos t)^{n+1}$.

Alors $u = \sin t$ et $v' = -(n+1) \sin t (\cos t)^n$. u, v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'où

$$W_{n+2} = [(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 (\cos t)^n dt = 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - (\cos t)^2) (\cos t)^n dt$$

$$= (n+1) [\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt - \int_0^{\pi/2} (\cos t)^2 (\cos t)^n dt] = (n+1) [W_n - W_{n+2}].$$

D'où $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ càd $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

3. ** Par récurrence : $n = 0 : W_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2$ et $\frac{0!}{(1*0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Supposons que pour un certain n , $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et montrons que $W_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Or } W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \text{ par 2.} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ par H.R.} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1))^2 (2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$ par 2. $= u_n$. Donc la suite (u_n) est constante. Or $u_0 = W_1W_0$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$ d'où $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{\pi}{2}$.

5. Par 5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{W_{2n}} \frac{\pi}{2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 2 : extrait d'Edhec S 97

1. $h : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]-\infty, 0[$, resp. $]0, +\infty[$ donc sur tout intervalle $[x, 2x]$ dès que $x \in \mathbb{R}^*$ (en effet : $x > 0 \Rightarrow [x, 2x] \subset]0, +\infty[$, et $x < 0 \Rightarrow [x, 2x] \subset]-\infty, 0[$). D'où $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $f(0) = \ln 2$, on obtient bien que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) g est continue sur $]-\infty, 0[$, resp $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En 0, d'après l'indication : pour $t \neq 0$, $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = g(0)$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

b)** Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, il existe G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Alors $\int_x^{2x} g(t) dt = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} G(0) - G(0) = 0$, car G étant une primitive de g sur $\mathbb{R}$, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier G est continue en 0.

c) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \int_x^{2x} (\frac{\sin t - t}{t^2} + \frac{t}{t^2}) dt = \int_x^{2x} g(t) dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \int_x^{2x} g(t) dt + [\ln |t|]_x^{2x} = \int_x^{2x} g(t) dt + \ln(2)$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 + \ln(2) = f(0)$ (gare aux $||$ dans $\ln |2x| - \ln |x| = \ln 2$ car $x < 0$ possible)

3. Attention de bien distinguer $x = 0$ et $x \in \mathbb{R}^*$! En $x = 0$, $f(-0) = f(0)$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ alors $-x \in \mathbb{R}^*$, et $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$. On pose $t = -u$, alors $dt = -du$ et $t = -x \Rightarrow u = x$ et $t = -2x \Rightarrow u = 2x$.

D'où $f(-x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{(-u)^2} (-du) = - \int_x^{2x} \frac{\sin(u)}{u^2} du = f(x)$. Conclusion : f est bien paire sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Comme h est continue sur $]0, +\infty[$, h admet une primitive H sur cet intervalle d'où : $\forall x > 0$, $f(x) = [H(t)]_x^{2x} = H(2x) - H(x)$. Comme H est dérivable sur $]0, +\infty[$ (déf d'une primitive), on obtient que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Et $f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2h(2x) - h(x)$
 $= \frac{2 \sin(2x)}{4x^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{2x^2} = \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{x^2} = -\sin x \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$. De même sur $]-\infty, 0[$.

(b) f' est donc du signe de $-\sin x$ sur $\mathbb{R}^*$. Donc f décroît sur $[-2\pi, \pi]$, puis croît sur $[-\pi, 0]$, puis décroît sur $[0, \pi]$ et croît sur $[\pi, 2\pi]$.

(c) Attention l'inégalité est stricte! $f(\pi) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt$. Or $\forall t \in [\pi, 2\pi]$, $h(t) = \frac{\sin t}{t^2} \leq 0$, donc $f(\pi) \leq 0$ (car $\pi < 2\pi$). Puis comme h est continue sur $[\pi, 2\pi]$ et $h(3\pi/2) = \frac{\sin(3\pi/2)}{(3\pi/2)^2} < 0$, l'inégalité est stricte.

(d) $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt$. On pose dans la 2e intégrale $u = t - \pi$. Alors $du = dt$ et les bornes : $t = 3\pi \Rightarrow u = 2\pi$ et $t = 4\pi \Rightarrow u = 3\pi$. D'où $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)^2} du = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{-\sin(u)}{(u+\pi)^2} du$
 $= \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}) dt$. Puis $\forall t \in [2\pi, 3\pi]$, $\sin t \geq 0$ et $(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}) \geq 0$. Donc l'intégrande est continue et positif sur $[2\pi, 3\pi]$ et ne s'annule pas en $2\pi + \pi/2$ (par exemple). D'où $f(2\pi) > 0$.

(e) Par parité, on obtient $f(-2\pi) > 0$ et $f(-\pi) < 0$, et on sait $f(0) = \ln 2 > 0$. Donc (th de la bijection sur chaque sous-intervalle), on trouve que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 4 solutions.

5. a) Attention aux valeurs absolues! Pour $x > 0$: D'après l'inégalité triangulaire comme $2x > x$, puisque $x > 0$, (les bornes doivent être dans le bon sens!) $|f(x)| \leq \int_x^{2x} |\frac{\sin t}{t^2}| dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = [-\frac{1}{t}]_x^{2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$.

b) Théorème d'encadrement : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. (Pour imaginer cette fonction : la faire osciller autour de l'axe des abscisses mais en faisant diminuer progressivement la hauteur des oscillations)