Eléments de correction du devoir maison 8

Exercice 1: `Edhec Ast1 2005`

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u(\lambda P+Q) = (\lambda P(a)+Q(a), \lambda P(b)+Q(b), \lambda P(c)+Q(c)) = \lambda(P(a), P(b), P(c))+(Q(a), Q(b), Q(c)) = \lambda u(P)+u(Q)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $P \in Ker(u) \Leftrightarrow u(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow P(a) = 0 = P(b) = P(c) \Leftrightarrow a, b, c$ sont 3 racines distinctes de $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et u est injective.
3. $I = Im(u) = Vect(u(1), u(X), u(X^2)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4))$
$= Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1))$ car $\frac{1}{2}((0,1,4)-(0,1,2)) = (0,0,1)$
$= Vect(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$ car $(0,1,2) - 2*(0,0,1) = (0,1,0)$
$= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ car $(1,1,1)-(0,1,0)-(0,0,1) = (1,0,0)$ donc u est surjective.
OU via la compatibilité d'un système (ne pas aller jusqu'à la résolution !!), pour mq que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe bien $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = (x,y,z)$ (définition de la surjection, que l'application soit linéaire ou non).
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mq il existe $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que
$\begin{cases} P(0) = x \\ P(1) = y \\ P(2) = z \end{cases}$. Or $\begin{cases} \gamma & = x \\ \alpha+\beta+\gamma & = y \\ 4\alpha+2\beta+\gamma & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = y \\ -2\beta-3\gamma & = z-4y \\ \gamma & = x \end{cases}$ système compatible car de Cramer.
4. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf DM 4).
a) Analyse : soit A un polynôme qui convient. Alors A est de degré au plus 2, et b et c sont deux racines distinctes, donc $(X-b)(X-c)$ divise A et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A(X) = (X-b)(X-c)Q(X)$. Or $deg(A) \leq 2 \Rightarrow deg(Q) \leq 0$ d'où $Q(X) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $A(X) = \alpha(X-b)(X-c)$. Puis $A(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.
Un unique candidat : $A(X) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(X-b)(X-c)$.
Synthèse immédiate : ce polynôme convient bien car $A \in \mathbb{R}_2[X]$, $A(a) = 1$ et $A(b) = 0 = A(c)$.
b) De même, on trouve $B(X) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}(X-a)(X-c)$ et $C(X) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}(X-a)(X-c)$.
5. a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda A(X) + \mu B(X) + \nu C(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors en $X = a$ on obtient : $\lambda A(a) + \mu B(a) + \nu C(a) = 0$ càd $\lambda = 0$. De même, en $X = b$ puis $X = c$, on trouve $\mu = 0 = \nu$.
b) Trouvons les (uniques) (α, β, γ) tels que $P(X) = \alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X)$. Même astuce : 3 inconnues, donc il faut 3 équations : on regarde en $X = a$, puis $X = b$ et $X = c$. On trouve $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$.
Finalement tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $P(X) = P(a)A(X) + P(b)B(X) + P(c)C(X)$.

Exercice 2: `Ecricome E2002 et Eml E 99`

1. Les tirages se font avec remise donc sont mutuellement indépendants et à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est 1/2. Comme X comptabilise le nombre de boules blanches obtenues, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
D'où $E(X) = n/2$ et $V(X) = n/4$.
2. On a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On introduit les événements N_i (B_i) "obtenir une boule noire (blanche) au i^e lancer".
$(Y = 0) = N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n$; mutuelle indépendance des tirages, $P(Y = 0) = P(N_1)P(N_2)...P(N_n) = (\frac{1}{2})^n$
$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(Y = k) = N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k$ et donc (indépendance des tirages) $P(Y = k) = (\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$.
3. $\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = P(Y=0) + \sum_{k=1}^{n} P(Y=k) = P(Y=0) + \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}\dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = (\frac{1}{2})^n + (1-(\frac{1}{2})^n)) = 1$.
4. $S = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = x\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = x \times \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = x \times \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = x \times \frac{-(n+1)x^n+1+nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^{n+1}+x+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ OU $(1-x)^2S = S - 2xS + x^2S = \sum_{k=1}^{n} kx^k - 2\sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} kx^{n+2}$, puis dans 2e somme $j = k+1$, dans 3e somme, $j = k+2$, et simplification
5. $E(Y) = \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^k = \frac{n(1/2)^{n+2}-(n+1)(1/2)^{n+1}+1/2}{1/4}$.

1. $X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!]$, $(X_1 = 1) = B_1$ d'où $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, et $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 1]\!]$.
2. $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et $(X_2 = 0) = B_1 \cap B_2)$, $(X_2 = 2) = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$ (réunion d'événements incompatibles) ... d'où $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 2]\!]$.
3. *hérédité* : Supposons que $X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$ pour un certain $n \geq 2$ donc : $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(X_{n-1} = k) = \frac{1}{n}$. Montrons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]$. On a $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, car on fait n tirages. De plus, $(X_{n-1} = k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est un s.c.e. (car $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$) donc d'après la formule des probabilités totales, $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) = P(X_{n-1} = 0)P_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) + 0 = \frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$car sachant $X_{n-1} = 0$, les $n-1$ tirages ont donné une boule noire, donc l'urne contient (au moment du n^{ie} tirage) : $1+n-1 = n$ boules noires et 1 boule blanche. Puis pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$P(X_n = j) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = j) = 0 + P(X_{n-1} = j-1)P_{(X_{n-1}=j-1)}(X_n = j) + P(X_{n-1} = j)P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = j) + 0$ (un tirage de plus donc le nombre de boules blanches stagne ou augmente de 1) ;

finalement, $P(X_n=j)=\frac{1}{n}\times\frac{1+j-1}{2+n-1}+\frac{1}{n}\frac{1+(n-1-j)}{2+n-1}=\frac{1+j-1+1+n-1-j}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}$.
OU via une description directe : $\forall j\geq 1$, $(X_n=j)=[(X_{n-1}=j-1)\cap B_n]\cup[(X_{n-1}=j)\cap N_n]$ et $(X_n=0)=(X_{n-1}=0)\cap N_n$ puis passage à la probabilité, en faisant le calcul comme ci-dessus (sachant la valeur prise par X_{n-1}, on connaît le nombre de boules blanches de l'urne et le nombre de boules total au moment du n^{ie} tirage ...)
Enfin, le calcul de l'espérance et de la variance se fait à la main. (attention ce n'est pas la loi du cours !!) :
$E(X_n)=\frac{n}{2}$ et $V(X)=\frac{n^2+2n}{12}=\frac{(n+1)^2-1}{12}$

Exercice 3 : `extrait d'Hec E maths 3 99`

1. Comme il y a 3 boules dans l'urne, $T_3(\Omega)=[\![2,4]\!]$. On introduit les Ai (resp. B_i et C_i) "on obtient la boule 1 (resp. 2 et 3) au i^e tirage". Alors $(T_3=2)=(A_1\cap A_2)\cup(B_1\cap B_2)\cup(C_1\cap C_2)$, réunion de 3 événements 2 à 2 incompatibles. Comme les tirages se font avec remise, $P(T_3=2)=\frac{1}{9}\times 3=\frac{1}{3}$; $(T_3=3)=[(A_1\cap B_2\cap\bar{C_3})\cup(A_1\cap C_2\cap\bar{B_3})]\cup...\cup[(C_1\cap A_2\cap\bar{B_3})\cup(C_1\cap B_2\cap\bar{A_3}]$ (la 3e boule doit être identique à la 1ere ou à la 2e) d'où $P(T_3=3)=\frac{2}{27}\times 6=\frac{4}{9}$. Et $P(T_3=4)=1-\frac{1}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$.
OU introduire des événements du type : D_i "on obtient au i^e tirage une boule différente des $i-1$ précédentes" (ce n'est pas un événement élémentaire, car un tel événement dépend de plusieurs tirages, mais la description et le calcul des probabilités reste simple !)
OU *Via dénombrement :* pour pouvoir dénombrer Ω, il fallait considérer que l'on faisait dans tous les cas 4 tirages avec remise (sinon, selon les issues, on n'avait pas le même nombre de tirages). On pose donc $\Omega=\{4\text{-listes}\}$. Puis $Card(T_3=2)=3$(choix 1ere boule quelconque) $*1$ (2e boule identique) $*3*3$ (3e et 4e boules quelconques, même pas tirées en pratique). D'où $P(T_3=2)=\frac{1}{3}$. De même $Card(T_3=3)=$3*2(2e boule différente de la première) *2 (soit la 1ere soit la 2e) *3(4e boule quelconque). D'où $P(T_3=3)=\frac{4}{9}$.
On en déduit $E(T_3)=\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{16}{9}=\frac{26}{9}=3-\frac{1}{9}$. $E(T_3^2)=\frac{4}{3}+\frac{18}{9}+\frac{64}{9}=\frac{94}{9}=10+\frac{4}{9}$ et
$V(T_3)=10+\frac{4}{9}-(3-\frac{1}{9})^2=1+\frac{10}{9}-\frac{1}{81}=2+\frac{8}{81}\geq 0$.
2. (a) On peut avoir une même boule dès le 2e tirage, mais également attendre d'avoir eu une première fois toutes les boules avant d'en avoir une déjà tirée. D'où $T_N(\Omega)=[\![2,N+1]\!]$.
   (b) Comme pour la première question, plusieurs rédactions possibles :
   Rédaction 1 (suggérée par l'indication de l'énoncé, mais peut-être plus difficile à comprendre) : L'événement $(T_N=2)$ se réalise ssi les 2 premiers tirages donnent la même boule, que ce soit la boule 1,2 ou ...,N. : $(T_N=2)=\{(i,i),i\in[\![1,N]\!]\}$. Il y a donc N issues, chacune de probabilité $\frac{1}{N^2}$ (tirage d'une boule puis d'une 2e) d'où $P(T_N=2)=N\times\frac{1}{N^2}=\frac{1}{N}$.
   $(T_N=N+1)$ ssi on obtient une fois chacune des boules avant de finir par une des boules : il y a N choix pour cette dernière boule, puis également $N!$ choix de permutation des N permières boules tirées. Il y a donc $N\times N!$ issues. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{N^{N+1}}$ d'où $P(T_N=N+1)=N\times N!\frac{1}{N^{N+1}}=\frac{N!}{N^N}$
   Rédaction 2 : on convient que l'on fait systématiquement les $N+1$ tirages. Alors $\Omega=\{N+1-listes\}$ et $Card(\Omega)=N^{N+1}$. Puis $card(T_N=2)=N$(choix 1ere boule) $*1$(choix 2e boule identique)$*N^{N-1}$(les derniers tirages n'ayant pas de contraintes) d'où $P(T_N=2)=\frac{N^N}{N^{N+1}}=\frac{1}{N}$ et de même $Card(T_N=N+1)=N!$ (permutation des N boules) $*N$ (choix de la dernière boule, identique à l'une des précédentes) : d'où $P(T_N=N+1)=\frac{N!N}{N^{N+1}}=\frac{N!}{N^N}$.
   Rédaction 3 : on garde les D_i : $(T_N=2)=D_1\cap\bar{D}_2$ et $(T_N=N+1)=D_1\cap...\cap D_N\cap\bar{D}_{N+1}$ ...
   (c) Soit $k\in[\![1,N]\!]$. L'événement $(T_N>k)$ se réalise ssi les k premiers tirages ont donné des boules 2 à 2 distinctes càd que les k premiers tirages forment un k- arrangement des boules. Il y a donc $A_N^k=\frac{N!}{(N-k)!}$ issues, chacune de probabilité $\frac{1}{N^k}$. D'où $P(T_N>k)=\frac{N!}{(N-k)!N^k}=\frac{N(N-1)(N-2)...(N-k+1)}{N^k}=\frac{N}{N}\times\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N}...\times\frac{N-k+1}{N}$
   $=1\times(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})...(1-\frac{k-1}{N})=\prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{N})$.
   Ou via la rédaction 2 : $Card(T_N>k)=A_n^k*N^{N+1-k}$, et via la rédaction 3 : $(T_N>k)=D_1\cap...\cap D_k$.
   Puis $\forall k\in[\![2,N+1]\!]$, $P(T_N=k)=P(T_n>k-1)-P(T_N>k)=\prod_{i=0}^{k-2}(1-\frac{i}{N})-\prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{N})=\frac{k-1}{N}\prod_{i=0}^{k-2}(1-\frac{i}{N})$
   (d) Comme k est fixé, $\frac{i}{N}\to 0$, pour tout $i\in\{0,1,...,k-1\}$ d'où par produit fini $P(T_N>k)\to 1$. Effectivement, quand le nombre de boules devient grand, il faut beaucoup de tirages pour tomber sur une même boule !
   (e) $E(T_N)=\sum_{k=2}^{N+1}kP(T_N=k)=\sum_{k=2}^{N+1}k(P(T_N>k-1)-P(T_N>k))=\sum_{k=2}^{N+1}kP(T_N>k-1)-\sum_{k=2}^{N+1}kP(T_N>k)$
   $=\sum_{j=1}^{N}(j+1)P(T_N>j)-\sum_{k=2}^{N+1}kP(T_N>k)=2P(T_N>1)+\sum_{k=2}^{N}P(T_N>k)-(N+1)P(T_N>N+1)$
   $=2+\sum_{k=2}^{N}P(T_N>k)+0=\sum_{k=0}^{N}P(T_N>k)$ car $P(T_N>1)=1=P(T_N>0)$ vu les valeurs prises de T_N.
   On en déduit $E(T_N)=1+\sum_{k=1}^{N}P(T_N>k)=\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{(N-k)!N^k}$ (formule encore vraie pour $k=0$)
   $=N!\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(N-k)!(N^k)}=N!\sum_{k=0}^{N}\frac{N^{n-k}}{(N-k)!N^N}=\frac{N!}{N^N}\sum_{k=0}^{N}\frac{N^{N-k}}{(N-k)!}=\frac{N!}{N^N}\sum_{j=0}^{N}\frac{N^j}{j!}$ (chgt de variable $j=N-k$).