Corrigé du devoir maison 9

Exercice 1 : `Edhec S 2008`

1. f et $t \mapsto \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors : $\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = \left[f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}dt$ d'où $\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt\right| \leq \left|f(b)\frac{\sin(\lambda b)}{\lambda}\right| + \left|f(a)\frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}\right| + \int_a^b \left|f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right| dt \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (inégalité triangulaire avec $a \leq b$). Réaliser que $\int_a^b |f'(t)|dt$ est un réel ! Au besoin, appliquer le théorème des extrêmas à f' : f' est continue sur $[a,b]$ donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq M$ d'où $0 \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,dt \leq \frac{M}{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. (a) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ d'où $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$. On obtient : $\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]$.

   (b) $\forall t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k\cos(kt) = \sum_{k=1}^n (-1)^k\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]$
   Reconnaître une somme télescopique ! Ecrire les premiers termes ... et les derniers (ne soyez pas paresseux) ou séparer la somme en 2 : $= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^n (-1)^k\cos(\frac{2k+1}{2}t) + \sum_0^{n-1} -(-1)^j\cos(\frac{2j+1}{2}t)]$ (avec $j = k-1$) $= \frac{1}{2}[(-1)^n\cos(\frac{2n+1}{2}t) - (-1)^0\cos(\frac{1}{2}t)] = \frac{1}{2}[(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)]$.

   (c) Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a $\frac{t}{2} \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \subset \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. On a alors :
   $\forall t \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^n (-1)^k\cos(kt) = (-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$ d'où par intégration (toutes les fonctions sont continues)
   $\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^k\cos(kt)dt = \int_0^1\left[(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right]dt$ et $\sum_{k=1}^n (-1)^k\int_0^1\cos(kt)dt = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt - \int_0^1\frac{1}{2}dt$
   d'où $\sum_{k=1}^n (-1)^k\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^1 = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt - \frac{1}{2}[t]_0^1$ Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt - \frac{1}{2}$.
3. D'après la première question, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ (dénominateur ne s'annule pas) et comme $\lambda = \frac{2n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que : $\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on obtient $(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (conséquence 2 du théorème d'encadrement ... à relire !) et finalement, $\sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$: la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2 : `inspiré d'un exercice d'Oral Escp 2014`

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements F_i "le rat choisi une fausse porte au i^e essai".

1. X est le temps d'attente du premier succès (choisir la bonne porte) dans un processus sans mémoire : la probabilité de succès à chaque essai étant $\frac{1}{n}$ (n portes), on en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{n})$. Donc X admet une espérance et $E(X) = n$.
2. (a) $Y(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$, car le rat peut se tromper longtemps avant de choisir la bonne porte.
   $(Y=1) = \overline{F}_1$ et plus généralement pour tout $k \geq 1$, $(Y=k) = F_1 \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k$. D'après la formule des probabilités composées, $P(Y=k) = P(F_1)P_{F_1}(F_2)...P_{F_1\cap...\cap F_{k-2}}(F_{k-1})P_{F_1\cap...\cap F_{k-1}}(\overline{F}_k) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times...\times\frac{k-1}{k}\times\frac{1}{k+1}$ (en effet, au moment du k^{ie} essai, on a rajouté $k-1$ fausses portes donc il y a $2+k-1 = k+1$ portes dont une bonne). Produit télescopique : $P(Y=k) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
   On vérifie alors (somme télescopique) : $\sum_{k=1}^N P(Y=k) = \sum_{k=1}^N (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.
   Espérance : $\forall k \geq 1$, $kP(Y=k) \geq 0$, $\frac{1}{k} \geq 0$ et $kP(Y=k) = \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}$. Or la série harmonique diverge, donc (critère d'équivalence) la série $\sum_{k\geq 1} kP(Y=k)$ diverge et Y n'admet pas d'espérance.

   (b)
   ```
   k=1
   while rand()> 1/(k+1)
   k=k+1
   end
   disp(k)
   ```
   ou utiliser deux variables n le nombre de portes et y le nombre d'essais
3. $Z(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$ et pour $k \leq \ell$, $(Z=k) = F_1 \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k$ et (mutuelle indép.) $P(Z=k) = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{k-1}$.
   Pour $k > l$, la description ne change pas, mais le calcul des probabilités change !
   $(Z=k) = F_1 \cap ... \cap F_\ell \cap F_{\ell+1} \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k$ Et d'après la formule des probabilités composées (à écrire) : $P(Z=k) = (1-\frac{1}{n})^\ell(1-\frac{1}{n-1})^{(k-1)-(\ell+1)+1}\frac{1}{n-1} = (1-\frac{1}{n})^\ell(1-\frac{1}{n-1})^{k-1-\ell}\frac{1}{n-1}$.
   Conclure avec une accolade : $P(Z=k) = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{k-1} & \text{si } k \leq l \\ (1-\frac{1}{n})^\ell(1-\frac{1}{n-1})^{k-1-\ell}\frac{1}{n-1} & \text{si } k > l \end{cases}$
   Puis $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z=k) = \sum_{k=1}^{\ell} P(Z=k) + \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} P(Z=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\ell}(1-\frac{1}{n})^{k-1} + (1-\frac{1}{n})^\ell\frac{1}{n-1}\sum_{k=\ell+1}^{+\infty}(1-\frac{1}{n-1})^{k-1-\ell}$
   $= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\ell-1}(1-\frac{1}{n})^j + (1-\frac{1}{n})^\ell\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{n-1})^i = \frac{1}{n}\frac{1-(1-\frac{1}{n})^\ell}{1-(1-\frac{1}{n})} + (1-\frac{1}{n})^\ell\frac{1}{n-1}\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n-1})} = 1 - (1-\frac{1}{n})^\ell + (1-\frac{1}{n})^\ell = 1$