Devoir à la maison 10 à rendre le mercredi 4 mai 2016

Possibilité de le faire en binôme : chacun rédige une partie du devoir.

Exercice 1: `exercice plus difficile`

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}$, $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}$ $\quad$ et $I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt$

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent.
2. (a) A l'aide d'une identité remarquable, établir : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$,
   (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$.
4. En déduire que :
   (a) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|y - x|$
   (c) f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.
6. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution.
   Justifier que $\alpha \in \,]0\,;\,1]$.
7. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
   (b) On suppose qu'une fonction scilab d'en-tête `function y=f(x)`, qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$, a déjà été écrite. Ecrire alors un programme scilab qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
8. (a) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que : $|f(x + h) - f(x) + hg(x)| \leq \dfrac{h^2}{3}$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -g(x)$.
   on pourra utiliser le (a) pour former le taux d'accroissement de f en x à l'intérieur des valeurs absolues

Exercice 2: `exercice facile`

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Vérifier alors que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
   On admet dans la suite de l'énoncé que : $C = P^{-1}BP$.
2. Montrer que l'ensemble $F = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|\, DN = NC\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner sa dimension.
3. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer : $M \in \ker(f) \Longleftrightarrow N \in F$, où $N = P^{-1}MP$
   (c) En déduire le noyau de f, puis la dimension de $Im\,(f)$.

Pour ceux qui veulent en faire plus :
année 2014-15 : l'exercice du DM 11 (probabilités) ou le DM 12 (variables aléatoires discrètes).