Devoir à la maison 2

Exercice 1: à rendre le jeudi 24 septembre 2015

1. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} = 3x+1$
2. Résoudre l'inéquation suivante sur $\mathbb{R}$: $|x^2 - 3x| \leq 2 - x$
3. Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{3^{n-k+1}}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^n}{k!(n-k)!}$
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq p$, $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
5. *facultatif* : Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.

Exercice 2: à rendre au plus tard le lundi 28 septembre 2015

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}$.

1. Calculer u_1 et u_2 (*et si besoin, réécrire la relation de récurrence entre les termes u_{n+1} et u_n*)
2. Montrer que chaque terme de cette suite est bien défini et positif ou nul.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n+1$.
5. A l'aide d'un encadrement, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - n = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + n}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n)$.

Devoir à la maison 2

Exercice 3: à rendre le jeudi 24 septembre 2015

1. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} = 3x+1$
2. Résoudre l'inéquation suivante sur $\mathbb{R}$: $|x^2 - 3x| \leq 2 - x$
3. Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{3^{n-k+1}}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^n}{k!(n-k)!}$
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq p$, $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
5. *facultatif* : Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.

Exercice 4: à rendre au plus tard le lundi 28 septembre 2015

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}$.

1. Calculer u_1 et u_2 (*et si besoin, réécrire la relation de récurrence entre les termes u_{n+1} et u_n*)
2. Montrer que chaque terme de cette suite est bien défini et positif ou nul.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n+1$.
5. A l'aide d'un encadrement, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - n = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + n}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n)$.