Mini-Devoir à la maison 3

à rendre avant le 7 octobre 2015

On introduit pour tout $x > 0$ la fonction $f(x) = x - \ln x$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n)$.

On pose également : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. Déterminer pour tout $x > 0$ le signe de $f(x) - x$.
3. Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
4. On suppose dans cette question que $a > 1$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u.
   (c) En déduire que la suite u converge et donner sa limite.
5. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 1$.
   (b) En déduire (sans calculs) que la suite u converge et donner sa limite.
6. En considérant $\ln(p_n)$, exprimer p_n en fonction seulement de a et de u_{n+1}.
   Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Mini-Devoir à la maison 3

à rendre avant le 7 octobre 2015

On introduit pour tout $x > 0$ la fonction $f(x) = x - \ln x$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n)$.

On pose également : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. Déterminer pour tout $x > 0$ le signe de $f(x) - x$.
3. Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
4. On suppose dans cette question que $a > 1$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u.
   (c) En déduire que la suite u converge et donner sa limite.
5. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 1$.
   (b) En déduire (sans calculs) que la suite u converge et donner sa limite.
6. En considérant $\ln(p_n)$, exprimer p_n en fonction seulement de a et de u_{n+1}.
   Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Mini-Devoir à la maison 3

à rendre avant le 7 octobre 2015

On introduit pour tout $x > 0$ la fonction $f(x) = x - \ln x$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n)$.

On pose également : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. Déterminer pour tout $x > 0$ le signe de $f(x) - x$.
3. Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
4. On suppose dans cette question que $a > 1$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u.
   (c) En déduire que la suite u converge et donner sa limite.
5. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 1$.
   (b) En déduire (sans calculs) que la suite u converge et donner sa limite.
6. En considérant $\ln(p_n)$, exprimer p_n en fonction seulement de a et de u_{n+1}.
   Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.