Devoir à la maison 4

à rendre au plus tard le mercredi 4 novembre 2015

Exercice 1:

Faire l'exercice 16 Feuille 5 : polynômes d'interpolation de Lagrange.

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(1) = 1$ et pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+1)\ln(x)}{x-1}$

1. Déterminer le signe de f sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est continue en 1. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
4. Etudier la fonction $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations complet de f.
6. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < (x-1)$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
7. Donner la représentation graphique de la fonction f.
8. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

Devoir à la maison 4

à rendre au plus tard le mercredi 4 novembre 2015

Exercice 3:

Faire l'exercice 16 Feuille 5 : polynômes d'interpolation de Lagrange.

Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(1) = 1$ et pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+1)\ln(x)}{x-1}$

1. Déterminer le signe de f sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est continue en 1. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
4. Etudier la fonction $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations complet de f.
6. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < (x-1)$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
7. Donner la représentation graphique de la fonction f.
8. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.