

Exercice 1:

1. Calculer $e^{2i\pi/3} - e^{i\pi/3}$, puis $e^{in\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer alors tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le polynôme $X^{3n+2} - X^{3n+1} + 1 \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 2:

Feuille 6 : faire l'exercice 14, question 2 (en montrant que g est bijective puis en trouvant g^{-1}) puis l'exercice 17, fonction f_2 (montrer tout d'un coup en choisissant l'énoncé de bijection avec les quantificateurs)

Exercice 3:

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs A ou B . On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas (donc le serveur B dans 30% des cas), et ce indépendamment.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.
 - (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
 - (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité que le serveur utilisé soit le A ?

Attention de bien tout justifier en introduisant des événements

2. A partir d'un jour donné (le jour 1), on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur : par exemple, $AABBBAA...$. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. On introduit pour tout $k \geq 1$, L_k "la première série est de longueur k ".
 - (a) A l'aide d'événements élémentaires bien choisis, décrire les événements L_1 , L_2 puis L_k pour tout $k \geq 1$.
 - (b) Déterminer pour tout $k \geq 1$, $P(L_k)$.
 - (c) Soit pour tout $k \geq 1$ T_k "le serveur A est utilisé pour la 1ère fois le jour k ". Calculer $P(T_k)$.

Exercice 4: facultatif

1. Feuille 6 exercice 13, question 3
2. Soit la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $P_0(X) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2P_{n+1}(X) = X^2P'_n(X) + XP_n(X) - 3P_n(X)$.
 - a) Déterminer P_1 puis P_2 .
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n est n et son coefficient dominant est $\frac{n!}{2^n}$.

Exercice 5:

1. Calculer $e^{2i\pi/3} - e^{i\pi/3}$, puis $e^{in\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer alors tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le polynôme $X^{3n+2} - X^{3n+1} + 1 \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 6:

Feuille 6 : faire l'exercice 14, question 2 (en montrant que g est bijective puis en trouvant g^{-1}) puis l'exercice 17, fonction f_2 (montrer tout d'un coup en choisissant l'énoncé de bijection avec les quantificateurs)

Exercice 7:

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs A ou B . On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas (donc le serveur B dans 30% des cas), et ce indépendamment.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.
 - (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
 - (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité que le serveur utilisé soit le A ?

Attention de bien tout justifier en introduisant des événements

2. A partir d'un jour donné (le jour 1), on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur : par exemple, $AABBBAA...$. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. On introduit pour tout $k \geq 1$, L_k "la première série est de longueur k ".
 - (a) A l'aide d'événements élémentaires bien choisis, décrire les événements L_1 , L_2 , puis L_k pour tout $k \geq 1$.
 - (b) Déterminer pour tout $k \geq 1$, $P(L_k)$.
 - (c) Soit pour tout $k \geq 1$ T_k "le serveur A est utilisé pour la 1ère fois le jour k ". Calculer $P(T_k)$.

Exercice 8: facultatif

1. Feuille 6 exercice 13, question 3
2. Soit la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $P_0(X) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2P_{n+1}(X) = X^2P'_n(X) + XP_n(X) - 3P_n(X)$.
 - a) Déterminer P_1 puis P_2 .
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n est n et son coefficient dominant est $\frac{n!}{2^n}$.