# Devoir à la maison 8 — à rendre le lundi 7 mars 2016

**Option plus facile** : exercices 1 et 2 **Option plus difficile :** exercices 1 et 3

**Exercice 1:**

*indication :* relire au préalable le chapitre Polynômes et notamment la section Racines.

Soit $a, b, c$ trois réels tels que $a < b < c$.

**Si besoin** (pour ceux qui ont des difficultés), faire l'exercice avec $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$.

On considère l'application $u$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le triplet $(P(a), P(b), P(c))$.

1. Montrer que $u$ est une application linéaire.
2. Montrer que $u$ est injective.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$. Montrer que $u$ est surjective.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on explicitera, tel que $A(a) = 1$, $A(b) = 0$, $A(c) = 0$ *(on pourra raisonner par analyse et synthèse, sans passer par un système).*

   (b) Donner sans justification l'expression des deux polynômes $B$ et $C$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :
   $B(a) = 0 = B(c)$ et $B(b) = 1$ et $C(a) = C(b) = 0$ et $C(c) = 1$.
5. (a) Montrer que $(A, B, C)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ (*soyez malins !*).
   On admet que cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car elle a le "bon nombre" de vecteurs ... cf chap suivant)

   (b) Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ : vu le 5. (a), il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma)$ de réels tel que $P(X) = \alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X)$. Calculer $\alpha, \beta, \gamma$ en fonction de $P$.

**Exercice 2:**

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, indiscernables au toucher. On y prélève une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c$ boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de $n$ tirages ($n \geq 1$).

**Étude du cas** $c = 0$

On effectue donc ici $n$ tirages avec remise de la boule dans l'urne. On note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des $n$ tirages et $Y$ la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ème} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $X$. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Déterminer la loi de $Y$.
3. Vérifier que : $\sum\limits_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1$
4. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $E(Y)$.

**Étude du cas** $c = 1$

On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des $n$ tirages.

1. Donner la loi de $X_1$.
2. Donner la loi de $X_2$.
3. ** Montrer alors que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ (*on raisonnera par récurrence*).
   Calculer son espérance et sa variance.

**Exercice 3:**

On considère un entier naturel $N$ supérieur ou égal à 3, et on dispose d'une urne qui contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On y effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors $T_N$ le rang aléatoire de ce dernier tirage.

1. Dans cette question, on suppose $N = 3$. Déterminer la loi de $T_3$ et calculer son espérance et sa variance.
2. On revient désormais au cas général où $N$ est supérieur ou égal à 3.

   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre $T_N$.

   (b) Calculer $P(T_N = 2)$, et $P(T_N = N + 1)$.
   *On pourra commencer par dénombrer le nombre d'issues, puis calculer la probabilité d'une issue ...*

   (c) Prouver, pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, les égalités $P(T_N > k) = \dfrac{N!}{(N-k)!N^k} = \prod\limits_{i=0}^{k-1}(1 - \dfrac{i}{N})$
   En déduire la loi de la variable aléatoire $T_N$.

   (d) Déterminer, pour tout entier $k$ fixé, la limite $\lim\limits_{N \to +\infty} P(T_N > k)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

   (e) Justifier l'égalité suivante : $E(T_N) = \sum\limits_{k=0}^{N} P(T_N > k)$. En déduire : $E(T_N) = \dfrac{N!}{N^N} \sum\limits_{j=0}^{N} \dfrac{N^j}{j!}$.