Devoir à la maison 9 à rendre le mercredi 30 mars 2016

Exercice 1:

Le but est de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif.
   Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.
2. (a) Rappeler la formule sur $\cos(a+b)$, puis exprimer $\cos(\frac{t}{2})\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$.
   (b) En déduire que : $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(\frac{t}{2})\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}((-1)^n\cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos(\frac{t}{2}))$
   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos(\frac{t}{2})}dt - \frac{1}{2}$.
3. Utiliser la première question pour conclure.

Exercice 2:

Soit $n \geq 2$ un entier. Un rat se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $n-1$ fausses portes et cette boîte comporte également une vraie porte. On note X (resp. Y, Z) la variable aléatoire représentant le nombre d'essais faits par le rat pour trouver la vraie porte dans la question 1.(resp 2. et 3.)

1. Dans cette question, on suppose que le rat ne possède pas de mémoire. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Dans cette question, $n = 2$. On suppose que le rat ne possède toujours pas de mémoire, et à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte.
   (a) Déterminer la loi de Y puis vérifier que $\sum\limits_{k \in Y(\Omega)} P(Y = k) = 1$. Y admet-elle une espérance ?
   (b) Ecrire un programme Scilab qui simule une réalisation de l'expérience et affiche la valeur de Y correspondante.
3. On revient au cas général $n \geq 2$ et on suppose dans cette question que le rat est sans mémoire pendant les ℓ premiers essais (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$), puis qu'il possède une mémoire immédiate : autrement dit à partir du $(\ell+1)$-ième essai, et tant qu'il n'est pas sorti, il évite la dernière porte essayée pour l'essai suivant.
   Déterminer la loi de Z puis vérifier que $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$

Pour ceux qui veulent en faire plus, je conseille vivement l'exercice 1 du DM 10 de l'année 2014-15.

Devoir à la maison 9 à rendre le mercredi 30 mars 2016

Exercice 3:

Le but est de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif.
   Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.
2. (a) Rappeler la formule sur $\cos(a+b)$, puis exprimer $\cos(\frac{t}{2})\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$.
   (b) En déduire que : $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(\frac{t}{2})\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}((-1)^n\cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos(\frac{t}{2}))$
   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos(\frac{t}{2})}dt - \frac{1}{2}$.
3. Utiliser la première question pour conclure.

Exercice 4:

Soit $n \geq 2$ un entier. Un rat se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $n-1$ fausses portes et cette boîte comporte également une vraie porte. On note X (resp. Y, Z) la variable aléatoire représentant le nombre d'essais faits par le rat pour trouver la vraie porte dans la question 1.(resp 2. et 3.)

1. Dans cette question, on suppose que le rat ne possède pas de mémoire. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Dans cette question, $n = 2$. On suppose que le rat ne possède toujours pas de mémoire, et à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte.
   (a) Déterminer la loi de Y puis vérifier que $\sum\limits_{k \in Y(\Omega)} P(Y = k) = 1$. Y admet-elle une espérance ?
   (b) Ecrire un programme Scilab qui simule une réalisation de l'expérience et affiche la valeur de Y correspondante.
3. On revient au cas général $n \geq 2$ et on suppose dans cette question que le rat est sans mémoire pendant les ℓ premiers essais (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$), puis qu'il possède une mémoire immédiate : autrement dit à partir du $(\ell+1)$-ième essai, et tant qu'il n'est pas sorti, il évite la dernière porte essayée pour l'essai suivant.
   Déterminer la loi de Z puis vérifier que $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$

Pour ceux qui veulent en faire plus, je conseille vivement l'exercice 1 du DM 10 de l'année 2014-15.