Corrigé du devoir maison 10 : `Problème edhec E 2015`

Partie I

1. $0 \le t \le x \Rightarrow t^2 \leqslant x^2 \Rightarrow 1-t^2 \geqslant 1-x^2 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{t^m}{1-t^2} \leqslant \frac{t^m}{1-x^2}$ car $t^m \ge 0$. Par croissance de l'intégrale $(0 \le x)$: $\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt = \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x^2}\frac{x^{m+1}}{m+1}$.
   Théorème d'encadrement : $\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $0 \le x < 1$ donc $\frac{x^{m+1}}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. (a) Comme $t^2 \neq 1$, $\sum\limits_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum\limits_{j=0}^{k-1}(t^2)^j = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$
   (b) On intègre l'égalité ci-dessus sur $[0;x]$: $\int_0^x \sum\limits_{j=0}^{k-1} t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$. D'où par linéarité de l'intégrale :
   $\sum\limits_{j=0}^{k-1}\int_0^x t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$. On conclut en calculant $\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$.
   (c) D'après 1. $(m=2k)$: $\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - 0 \in \mathbb{R}$. Donc la série $\sum\limits_{j\ge0}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$
   (d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors : $\sum\limits_{j=k}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - (\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt) = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$

Partie II

1. N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p. Donc $N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
2. (a) Si m est pair : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$. D'où $\frac{m}{2} = k$, et $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.
   Si m est impair : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k+1$.D'où $\frac{m}{2} = k + \frac{1}{2}$, et donc $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k \neq m$.
   (b)
```
p=input('donner la valeur de p')
    N=1 ; while rand()>p, N=N+1, end
X=floor(N*rand())+1
if 2*floor(X/2)==X then, disp('le joueur a perdu'), else disp('le joueur a gagné'), end
```
3. (a) Si $k \in [\![0; j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1 \le 2j$. Comme chaque boule a la même probabilité d'être tirée, et que sachant $(N=2j)$ l'urne en contient $2j$, $P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j}$.
   Si $k \ge j$, la boule $2k+1$ n'est pas dans l'urne donc $P_{(N=2j)}(X=2k+1) = 0$
   (b) De même, $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1}$ si $k \leqslant j$ et 0 sinon.
4. (a) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(N=n), n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $P(X=2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=2k+1)$. Il reste à couper la somme (indices pairs et impairs)
   $P(X=2k+1) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} P(N=2j)P_{(N=2j)}(X=2k+1) + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} P(N=2j+1)P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$
   $= \sum\limits_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1}P_{(N=2j)}(X=2k+1) + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} pq^{2j}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) = \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} pq^{2j-1}P_{(N=2j)}(X=2k+1) + 0 +$ $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} pq^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) + 0$ d'après 3. $= \frac{p}{q}\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\frac{1}{2j} + \frac{p}{q}\sum\limits_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\frac{1}{2j+1}$
   (b) D'après I, avec $x = q \in [0,1[$, $P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$
5. (a) D'après 4.(b) : $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right) = \frac{p}{q}\int_0^q\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt = \frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}\sum\limits_{k=0}^{n}(t^2)^k\right)dt$
   $= \frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t} \times \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$
   (b) $A =$ « X est impair » $= \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}(X = 2k+1)$ réunion d'événements 2 à 2 incompatibles. D'où par $\sigma-$additivité,
   $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$ d'après 5.a), car de la même façon qu'au I1., on peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$.
6. (a) Mettre le membre de droite au même dénominateur. Par identification des coefficients, $a = b = 1/4$ et $c = 1/2$.
   (b) D'où $P(A) = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right)$
   Après calculs, $P(A) = \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}$.
   (c) $\frac{1+q}{1-q} > 1$, donc $\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0$. De plus, $\frac{1-q}{4q} > 0$. D'où $P(A) > \frac{1}{2}$, et le jeu est favorable au joueur.