Corrigé du devoir maison 2

Rappel : les calculatrices sont interdites !

Exercice 1 : L'équation est définie sur $\mathcal{D} = [-23, +\infty[$.
Rédaction 1 : par analyse et synthèse.
Analyse Soit $x \in [-23, +\infty[$ une solution. $\sqrt{x+23} = x+3 \Rightarrow (x+23) = (x+3)^2 \Rightarrow x^2+5x-14 = 0$
On trouve $\Delta = 81$ donc deux candidats $x = 2$ et $x = -7$.
Synthèse : on vérifie $2 \in \mathcal{D}$ et $\sqrt{2+23} = 5 = 2+3$ et $-7 \in \mathcal{D}$ et $\sqrt{-7+23} = 4 \neq -7+3$.
Conclusion : une unique solution $x = 2$.
Rédaction 2 : par équivalence (et donc disjonction de cas)
Si $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ l'équation ne peut avoir de solutions (une racine carrée est toujours positive).
Si $x \geq -3$, alors comme les deux membres sont positifs, on a l'équivalence $\sqrt{x+23} = x+3 \Leftrightarrow (x+23) = (x+3)^2$ $\Leftrightarrow x^2+5x-14 = 0$. On trouve $\Delta = 81$ d'où $x = 2 \geq -3$ et $x = -7 < -3$.
Une unique solution : $x = 2$.

Exercice 2

1. $g : x \mapsto x^2 + \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est strictement croissante comme somme de 2 fonctions strictement croissantes (ou calculer g') et va continument de $-\infty$ (limite en 0) à $+\infty$ (limite en $+\infty$) donc passe une et une seule fois par la valeur 0. (théorème de la bijection, parfois appelé dans le secondaire théorème de la valeur intermédiaire) $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \ln(2) < 0 = g(\alpha) < 1 = g(1)$ d'où par stricte croissance de g, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
2. $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f'(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{4x}$ donc du signe du trinôme $-2x^2+4x-1$: $\Delta = 8$ d'où $x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{-4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Attention de bien justifier que $x_1 < \frac{1}{2} < 1 < x_2$ sinon on ne peut pas conclure ! (en particulier, savoir $x_1 \notin [\frac{1}{2}, 1]$ et $x_2 \notin [\frac{1}{2}, 1]$, ne suffit pas ! car il faut précisément savoir si on est à l'intérieur ou à l'extérieur des racines).
$x_2 > 1$ immédiat. Pour x_1, partir de $4 > 2$ donc $\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$ et finalement $\frac{-1}{\sqrt{2}} < \frac{-1}{2}$, d'où $x_1 < \frac{1}{2}$.
D'où f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
Remarquer alors $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{16} + \frac{1}{4}\ln 2 \geq \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (ou faire $f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = ... > 0$ et $f(1) = \frac{3}{4} \leq 1$ d'où (d'après le TV), $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\frac{1}{2} \leq f(\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(1) \leq 1$.
3. (a) $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{4}$
   (b) Par récurrence. $n = 0$: $u_0 = 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$.
   Supposons que pour un certain entier n, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$, et montrons que pour ce n, $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$.
   Or $u_{n+1} = f(u_n)$ d'où en utilisant 2.(b) avec $x = u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$, on obtient $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$. Conclure.
   (c) Attention, $u_n \leq 1$, donc $\ln(u_n) \leq 0$! donc à la main, le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne sort pas.
   2e piste : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{1}{4}g(u_n)$ (où g est définie dans la question préliminaire). Problème, car on ne sait pas si $u_n > \alpha$ ou non, et donc on ne connait pas le signe de $g(u_n)$.
   D'où par récurrence : $u_1 = \frac{3}{4} \leq u_0 = 1$. Puis soit un entier n pour lequel $u_{n+1} \leq u_n$. Montrons alors que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Or par croissance de f, $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ càd $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
   Conclure : la suite est décroissante.
   (d) La suite u est décroissante et minorée par $1/2$ donc converge. Notons ℓ sa limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$.
   On résout $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4}g(\ell) \Leftrightarrow g(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \alpha$. La suite u converge donc vers α.

Les bonus

1. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Puis $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0 \Leftrightarrow 6e^2e^{5x} - 7e^{4x+2} + e^2e^{3x} = 0$ $\Leftrightarrow e^2e^{3x}[6e^{2x} - 7e^x + e^x] = 0 \Leftrightarrow [6e^{2x} - 7e^x + 1] = 0$. On pose alors $X = e^x > 0$, et l'équation devient $6X^2 - 7X + 1 = 0$ (à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$). $\Delta = 25$, d'où $X_1 = \frac{1}{6} < 0$ et $X_2 = 1$.
Finalement, deux solutions $x_1 = \ln(X_1) = -\ln(6)$ et $x_2 = \ln X_2 = 0$.
2. Si $m = 1$, l'inéquation n'est pas définie. Si $m \neq 1$, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas :
Première étape : mise au même dénominateur, et se ramener à l'étude d'un signe.
$(I) \Leftrightarrow \frac{x}{m-1} - \frac{3x-1}{2} - \frac{x+2}{4(m-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x-2(m-1)(3x-1)-(x+2)}{4(m-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(9-6m)x+(2m-4)}{4(m-1)} > 0$.
1er cas : $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$. Alors $(I) \Leftrightarrow (9-6m)x + (2m-4) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-(2m-4)}{9-6m}$ car $m < 1 \Rightarrow 9-6m > 0$.
Donc si $m < 1$, $\mathscr{S}_m =]-\infty, \frac{-(2m-4)}{9-6m}[$.
2e cas : $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Alors $(I) \Leftrightarrow (9-6m)x + (2m-4) > 0 \Leftrightarrow (9-6m)x > -2m+4$. Il reste encore à connaître le signe de $9-6m$ pour finir la résolution.
Si $1 < m < \frac{3}{2}$, $9-6m > 0$ d'où $(I) \Leftrightarrow x > \frac{-2m+4}{9-6m}$ et $\mathscr{S}_m = [\frac{-2m+4}{9-6m}, +\infty[$.
Si $m = \frac{3}{2}$, $(I) \Leftrightarrow 0x - 1 > 0$ faux donc $\mathscr{S}_{3/2} = \varnothing$.
Si $m > \frac{3}{2}$, $9-6m < 0$ d'où $(I) \Leftrightarrow x < \frac{-2m+4}{9-6m}$ et $\mathscr{S}_m = [-\infty, \frac{-2m+4}{9-6m}[$.