## Corrigé du devoir maison 3

Penser à préciser les noms des formules utilisées ! (quand elles ont un nom)

**Exercice 1 :**

1. Attention $p$ est fixé (même si on ne le connait pas) donc $p$ ne peut pas être choisi dans l'initialisation !
Par récurrence (simple) sur l'entier $n$ :
$\boxed{\textit{Cas } n = p}$ : montrer que $\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p} = \binom{p+1}{p+1}$. Or $\binom{p+1}{p+1} = 1$ et $\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$.
Supposons que pour un certain entier $n \geq p$, $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ et montrons que $\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$.
Or (relation de Chasles), $\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$ =[H.R.] $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$ (formule du triangle de Pascal).
*Conclure.*
$\longrightarrow$ il est inutile de redémontrer la formule du triangle de Pascal, puisque c'est une formule du cours ; en revanche, il faut la citer !
2. $S_1$ : ne pas croire que l'on va se ramener au binôme de Newton (il n'y a pas de coefficients binomiaux !). Les puissances doivent vous guider vers la somme géométrique. De plus, $n$ est une constante par rapport à l'indice de sommation, donc $S_1 = 5^n \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{3})^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{3})^k(\frac{1}{5})^k = 5^n \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{15})^k = 5^n \dfrac{1-(1/15)^{n+1}}{1-1/15}$.
Dans $S_2$, il manque le $n!$ pour faire apparaître $\binom{n}{k}$. Comme $n!$ est une constante par rapport à $k$, on obtient $S_2 = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}2^k \times 2 = \frac{2}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k}$. Il reste encore le problème de la borne de départ. D'après la relation de Chasles, $S_2 = \frac{2}{n!}[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} - \binom{n}{0}2^0 1^n] = \frac{2}{n!}[(2+1)^n - 1] = \frac{2}{n!}[3^n - 1]$ d'après la formule du binôme.

**Exercice 2 :**

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Faire alors un tableau de signe pour le numérateur.
Limites (pas de FI) : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.
(b) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$. Tableau de signe.
2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$x_n$ existe et $x_n > 1$". *n=0* : par hypothèse, $x_0 \in ]1, +\infty[$.
Supposons que pour un certain $n$, $x_n$ existe et $x_n > 1$. Alors $x_n \in \mathcal{D}_f$ donc $x_{n+1} = f(x_n)$ existe et d'après le TV de $f$, comme $x_n > 1$, $x_{n+1} = f(x_n) \geq 4 > 1$. Ccl.
(b) $x_{n+1} - x_n = g(x_n) \geq 0$ d'après 1.(b), puisque $x_n > 1$.
(c) La suite $(x_n)$ est croissante. Supposons qu'elle est majorée : alors elle converge. Notons $l$ sa limite. Comme $l \geq x_0$, on obtient $l > 1$. Par passage à la limite dans la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $l = f(l)$ (Attention, il est important de remarquer $l > 1$, sinon, $f(l)$ aurait pu ne pas exister ...). D'où $g(l) = 0$ ce qui est impossible d'après 1.(b). Contradiction. Donc la suite $(x_n)$ n'est pas majorée, et donc (comme elle est croissante) elle diverge vers $+\infty$.
3. (a) *hérédité :* Supposons $x_n \geq n+1$. Alors par définition de $f$, $x_{n+1} = f(x_n) = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \geq x_n + 1$ (car $x_n > 1$ donc $\frac{1}{x_n-1} > 0$). D'où par H.R., $x_{n+1} \geq n+1+1 = n+2$. Ccl.
(b) $x_k - x_{k-1} - 1 = f(x_{k-1}) - x_{k-1} - 1 = \frac{1}{x_{k-1}-1}$(par déf de $f$) $\leq \frac{1}{k-1}$ puisque $x_{k-1} \geq k$ d'après 3.(a).
Par ailleurs, $x_k - x_{k-1} - 1 = \frac{1}{x_{k-1}-1} \geq 0$ puisque $x_{k-1} \in ]1, +\infty[$.
On somme l'encadrement obtenu de $k=2$ à $n$ : $0 \leq \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1} - 1) \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}$ d'où (avec $j = k-1$)
$0 \leq \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=2}^{n}1 \leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$ et par télescopage : $0 \leq x_n - x_1 - (n-1) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ (avec $k = j$)
4. (a) Etudier la fonction $h$ définie sur $]0, 1[$ par $h(x) = -\ln(1-x) - x$ ; $\forall x \in ]0, 1[$, $h'(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} > 0$.
(b) On applique le $(a)$ à $x = \frac{1}{k} \in ]0, 1[$ : $\frac{1}{k} \leq -\ln(1 - \frac{1}{k}) = -\ln(\frac{k-1}{k}) = -\ln(k-1) + \ln(k)$.
(c) On somme alors l'inégalité précédente pour $k$ variant de 2 à $n-1$ : (Attention de bien partir de 2, car le 4.(b) vrai à partir de $k=2$ !) $\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n-1}(\ln(k) - \ln(k-1)) = \ln(n-1) - \ln 1 = \ln(n-1)$ (somme télescopique) d'où (relation de Chasles) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} = 1 + \ln(n-1)$, et finalement le 3.(b) donne
$x_n - x_1 - (n-1) \leq 1 + \ln(n-1)$ soit $x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1)$. L'autre côté étant le 3.(a).
(d) Le 4.(c) donne alors (car $n > 0$) $\frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_1+n+\ln(n-1)}{n}$ càd $1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n}$. Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\frac{\ln(n-1)}{n} = \frac{\ln(n(1-1/n))}{n} = \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1-1/n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.