Corrigé du mini-devoir maison 6

Question :

1. $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R}/\, x \neq 0 \text{ et } 1-x>0\} =]-\infty,0[\cup]0,1[$. D'où f est définie sur $]-\infty,1[$.
2. Quand $x \to 1$, $f(x) \to +\infty$ (pas de FI), donc f ne se prolonge pas par continuité en 1. Asymptote verticale d'équation $x=1$.
3. Sur $]-\infty,0[$ (resp. $]0,1[$), f est continue comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En 0 : avec $t=-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $f(x) = \frac{\ln(1+t)}{t} \to 1 = f(0)$ (limite usuelle). Donc f continue en 0.
   Ou avec les équivalents, comme $-x \to 0$ en 0 : $f(x) \sim -\frac{-x}{x} = 1 \to 1 = f(0)$
4. Sur $]-\infty,0[$ (resp. $]0,1[$), f est dérivable. En 0 , en posant $t=-x\to 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\frac{\ln(1-x)}{x}-1}{x} = -\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ $= -\frac{\ln(1+t)-t}{(-t)^2} = -\frac{\ln(1+t)-t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} -(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{t^2}) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Exercice :

1. Poser la fonction $f(x) = e^x - 3 - 2x$ définie sur $\mathbb{R}^-$ et faire son T.V. : f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc (théorème de la bijection) f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(]-\infty,0]) = [f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [-2,+\infty[$.
   Or $0 \in [-2,+\infty[$ donc (par définition de la bijection), l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}^-$.
   $f(-2) = 1 + \frac{1}{e^2} \geq 0$ et $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \leq 0$ donc $f(-1) \leq f(\alpha) \leq f(-2)$ et par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}^-$, $-1 \geq \alpha \geq -2$.

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}^-$; $g(x) = x \Leftrightarrow e^x - 3 = 2x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ par 1. Donc α unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^-$.
   b) méthode 1 : Faire le tableau de variations de g : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x/2 > 0$.
   On trouve que $g(]-\infty,0]) =]-3/2,-1] \subset]-\infty,0]$ donc $\forall x \in]-\infty,0]$, $g(x) \in]-\infty,0]$.
   méthode 2 : construire directement le résultat
   $x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq e^x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq e^x - 3 \leq -2 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq g(x) \leq -1 \Rightarrow g(x) \leq 0$ ...
   De plus $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq e^0 = 1$ (par croissance de l'exp) $\Rightarrow e^x/2 < \frac{1}{2}$. Et $g'(x) \geq 0$ donc pour $x \leq 0$, $|g'(x)| = g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

3. (a) Récurrence : supposons $u_n \leq 0$, alors $u_n \in]-\infty,0]$, et par 2.b) $u_{n+1} = g(u_n) \in]-\infty,0]$ d'où $u_{n+1} \leq 0$.
   (ou utiliser la monotonie de g pour construire l'inégalité sur u_{n+1} ... mais moins dans l'esprit de l'énoncé).

   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^-$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, donc on peut appliquer l'IAF à g aux points $u_n \in \mathbb{R}^-$ et $\alpha \in \mathbb{R}^-$: $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ car $g(\alpha) = \alpha$ d'après 2.a)
   Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
   initialisation : Attention, l'initialisation est difficile ici, donc bien tout justifier ! $|u_0 - \alpha| = |-1-\alpha|$.
   Or $-2 \leq \alpha \leq -1 \Rightarrow 2 \geq -\alpha \geq 1 \Rightarrow -1+2 \geq -1-\alpha \geq -1+1 \Rightarrow 1 \geq -1-\alpha \geq 0 \Rightarrow |-1-\alpha| \leq 1$.
   D'où $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \frac{1}{2^0}$.
   hérédité : supposons $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Or $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (par ce qui précède) $\leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$ (H.R.) $= \frac{1}{2^{n+1}}$. *Conclure.*

   (c) Théorème d'encadrement : $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $2>1$) donc $u_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$....

   (d) Comme (u_n) converge vers α, si n est suffisamment grand, u_n donnera une bonne valeur approchée de α.
   On cherche donc n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-9}$: pour cela, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$ car alors $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$.
   Puis $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow 10^9 \leq 2^n \Leftrightarrow \ln(10^9) \leq \ln(2^n)$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 9\ln(10) \leq n\ln(2) \Leftrightarrow$ $\frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \leq n$ (car $\ln(2)>0$). Le premier n qui convient est $n_0 = \lfloor \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \rfloor + 1$.
   Il reste à écrire un programme qui calcule n_0 puis renvoie u_{n_0} :

```
u=-1
n=floor[9*log(10)/log(2)]+1
for k=1:n
u=(exp(u)-3)/2
end
disp(u)
```