Devoir à la maison 10 — à rendre le mercredi 19 avril 2017

Une copie par binôme mais chacun doit rédiger des questions et corriger (dans une autre couleur) les écrits de l'autre.

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.
2. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

   (b) En déduire que : $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

   (c) Etablir alors que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$. On admet que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N et rappeler son espérance et sa variance.
2. (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

   (b) Ecrire alors un programme Scilab qui demande p à l'utilisateur, qui simule les variables N et X, puis qui affiche si le joueur a gagné ou perdu.
3. (a) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$, puis lorsque $k \geq j$.

   (b) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$, puis lorsque $k \geq j+1$.
4. (a) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

   (b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$.
5. (a) Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \dfrac{p}{q}\left(\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$

   (b) Exprimer l'événement A à l'aide de la variable X. En déduire que : $P(A) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$.
6. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait : $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$

   (b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

   (c) Le jeu est-il favorable au joueur ?