Corrigé du devoir maison 12

Exercice 1 :

1. f est continue et positive sur $[0,+\infty[$ ($a>0$), et est nulle sur $]-\infty,0[$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$, et est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
   Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$: f est nulle sur $]-\infty,0[$, donc $\int_{-\infty}^{0} f$ converge et vaut 0.
   Etude de $\int_{0}^{+\infty} f$, impropre en $+\infty$: posons $A>0$. Alors $\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{x}{a}e^{-x^2/2a}dx = [e^{-x^2/2a}]_0^A$
   $= 1-e^{-A^2/2a} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où $\int_0^{+\infty} f$ converge et vaut 1. D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.
2. $X(\Omega)=[0,+\infty[$, donc si $x<0$, $F_X(x)=0$ (ou écrire $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$). Puis, si $x\geq 0$,
   $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0+\int_0^x f(t)dt = [e^{-t^2/2a}]_0^x = 1-e^{-x^2/2a}$. Conclure avec une accolade.
3. (a) Comme $Y=\frac{X^2}{2a}$, $Y(\Omega)=[0,+\infty[$ donc si $x<0$, $F_Y(x)=0$ (ou écrire $F_Y(x)=P(\frac{X^2}{2a}<0)=0$). Puis si $x\geq 0$, comme $a>0$, $F_Y(x)=P(Y\leq x)=P(X^2\leq 2ax)=P(-\sqrt{2ax}\leq X\leq\sqrt{2ax})=F_X(\sqrt{2ax})-F_X(-\sqrt{ax})$
   $=1-e^{-(\sqrt{2ax})^2/2a}-0=1-e^{-x}$ (car $-\sqrt{ax}\leq 0$ donc$F_X(-\sqrt{ax})=0$).
   Finalement, $F_Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ On obtient bien que $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$.
   (b) Comme X est une variable positive, $X=\sqrt{2aY}$ d'où la syntaxe : `Y=grand(1,1,'exp',1), X=sqrt(2*a*Y)`.

Exercice 2 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=\frac{2}{(e^{-x}+e^{x})^2}=f(x)$. f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$: par parité, il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, impropre en $+\infty$. On pose $A>0$ et $I_A=\int_0^A f(t)dt$. On ne reconnaît pas sous cette forme de primitive : deux méthodes.
   Soit changement de variable C^1 $t\mapsto e^t$. On pose $u=e^t$, $t=\ln(u)$, $dt=\frac{1}{u}du$ Bornes : $t=0\Rightarrow u=1$ et $t=A\Rightarrow u=e^A$. D'où $I_A=\int_1^{e^A}\frac{2}{(u+\frac{1}{u})^2}\frac{du}{u}=\int_1^{e^A}\frac{2}{(\frac{u^2+1}{u})^2}\frac{du}{u}=\int_1^{e^A}\frac{2u}{(u^2+1)}du$. Forme $\frac{u'}{u^2}$ de primitive $\frac{-1}{u}$. D'où $I_A=[-\frac{1}{u^2+1}]_1^{e^A}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{2A}+1}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} f$ converge et vaut $\frac{1}{2}$, d'où par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut $2\times\frac{1}{2}=1$. Conclure.

   Soit on modifie la forme initiale : $\frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{2}{(\frac{e^{2x}+1}{e^x})^2}=\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ sous la forme $\frac{u'}{u}$ ... que l'on intère en $\frac{-1}{(e^{2x}+1)}$.
3. Comme f est paire sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto xf(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.Donc si l'espérance existe, alors elle est nulle. Il suffit donc de vérifier que $E(X)$ existe, càd que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument. Par imparité, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument, ce qui revient à la convergence car l'intégrande est positif. Or $xf(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{(e^x)^2}=xe^{-2x}=o(e^{-x})$ puisque d'après les croissances comparées, $\frac{xe^{-2x}}{e^{-x}}=xe^{-x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Il reste alors à appliquer le critère de négligeabilité pour les fonctions positives et continues .... On obtient bien que $E(X)$ existe, d'où $E(X)=0$.
4. F est continue (fonction de répartition), et comme X est à densité, $F'=f>0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc (théorème de la bijection), F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $F(\mathbb{R})=]\lim\limits_{x\to-\infty}F(x),\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)[=]0,1[$ (puisque F est une fonction de répartition).
5. (a) $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et $Y(\Omega)=]0,1[$. Donc pour tout $x\leq 0$, $F_Y(x)=0$ et pour tout $x\geq 1$, $F_Y(x)=1$. Puis si $x\in]0,1[$, $F_Y(x)=P(Y\leq x)=P(F(X)\leq x)=P(X\leq F^{-1}(x))$ car F^{-1} bijection croissante sur $]0,1[$ (attention de bien se ramener à $x\in]0,1[$, sinon, F^{-1} n'y est pas définie !), $=F(F^{-1}(x))=x$.
   (b) On reconnaît que $Y\hookrightarrow\mathcal{U}([0,1])$. En particulier, Y est une variable à densité (inutile de vérifier que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf ...), et $E(Y)=\frac{1}{2}$.
   (c) *bonus* : avec le même changement de variable qu'au 3., on trouve que :
   pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=1-\frac{1}{e^{2x}+1}$ (poser une lettre, à la place de $-\infty$).
   On résout alors l'équation $F(x)=y$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, avec $y\in]0,1[$ fixé. On trouve $F^{-1}(y)=\frac{1}{2}\ln(\frac{y}{1-y})$.
   Enfin, comme $X=F^{-1}(Y)$, la syntaxe scilab est : `Y=rand(), X=log(Y/(1-Y))/2`