

Corrigé du devoir maison 2

Attention : il reste encore beaucoup de confusions dans l'utilisation de $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$: je rappelle que les équivalences ne sont nécessaires que lorsque vous faites une résolution ou que vous partez du résultat à montrer (puisque dans ce cas, seuls les retours sont nécessaires!). Dans TOUS les autres cas, utiliser $\Rightarrow$ surtout que souvent $\Leftrightarrow$ est faux.

Exercice 1:

Erreur récurrente : confusion entre l'ensemble de définition (càd l'ensemble des x où tous les termes de l'équation existent) et l'ensemble des x où l'équation peut avoir des solutions. Pour insister : $\{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0 \text{ et } 3x+1 \geq 0\}$ n'est pas l'ensemble de définition. C'est une confusion de deux ensembles distincts.

Corrigé : Equation définie sur $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$. Puis deux rédactions possibles :

Analyse : supposons qu'une telle solution $x \in [-1, +\infty[$ existe. Alors $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Rightarrow x+1 = (3x+1)^2$
 $\Rightarrow 9x^2+5x=0 \Rightarrow x(9x+5)=0 \Rightarrow x=0 \in [-1, +\infty[$ ou $x = -\frac{5}{9} \in [-1, +\infty[$. Il y a donc deux candidats à cette équation.

Synthèse : on vérifie si les candidats sont solutions. $\sqrt{0+1} = 1 = 3 \times 0 + 1$ mais $\sqrt{-\frac{5}{9}+1} = \frac{2}{3} \neq 3 \times (-\frac{5}{9}) + 1 = -\frac{2}{3}$.

Conclusion : cette équation admet une unique solution $x = 0$.

Rédaction par équivalences : (brouillon $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/3$)

Sur $[-1, -1/3[$, $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $3x+1 < 0$. L'équation n'admet aucune solution.

Sur $[-1/3, +\infty[$, comme les deux membres sont positifs, on a l'équivalence $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Leftrightarrow x+1 = (3x+1)^2$
 $\Leftrightarrow 9x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(9x+5)=0 \Leftrightarrow x=0 \in [-\frac{1}{3}, +\infty[$ ou $x = -\frac{5}{9} \notin [-1/3, +\infty[$. Ccl : $\mathcal{S} = \{0\}$.

Exercice 2 :

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
En $-\infty$, pas de F.I. : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, $\ln(1+x^2) = \ln(x^2(1+1/x^2)) = 2\ln(x) + \ln(1+1/x^2)$ donc se comporte comme $2\ln(x)$ (puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+1/x^2) = 0$). Donc d'après les croissances comparées, $f(x)$ se comporte comme x (la rédaction sera revue ultérieurement). Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $1+x^2 \geq 1$ et $\ln(1+x^2) \geq 0$.
La courbe est en-dessous de la droite Δ .
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$. L'écart entre la droite et la courbe devient infiniment grand. (la droite n'est pas du tout asymptote à la courbe).
- (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$ donc $f''(x) = 0 - [\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}] = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$.
(b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Les points d'inflexion ont pour abscisse $x = 1$ et $x = -1$.
- Question difficile : Tracer la droite Δ . La courbe sera en-dessous.
tangente en 0 : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc équation $y = x$. Δ est donc tangente à la courbe en l'origine.
Tangente en 1 : $f(1) = 1 - \ln(2) \simeq 0.31$. $f'(1) = 0$. Tangente horizontale, qui traverse la courbe.
Tangente en -1 : $f(-1) \simeq -1.69$. $f'(-1) = 2$; f est concave sur $[-1, 1]$, convexe ailleurs et croissante sur $\mathbb{R}$.
- (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ d'après 2. en $x = u_n \in \mathbb{R}$. Suite décroissante.
(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
Pour $n = 0$: $u_0 = 1 \geq 0$. Supposons maintenant que pour un certain n , $u_n \geq 0$. Alors par croissance de f sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) \geq f(0)$. D'où $u_{n+1} \geq 0$ puisque $f(0) = 0$. Conclure.
On en déduit que la suite u est minorée par 0, et comme elle est décroissante, elle converge. Notons ℓ sa limite.
Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (possible car f continue), on obtient $\ell = f(\ell)$. Or $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 0 = \ln(1+\ell^2) \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$. La suite converge vers 0.
(c) Penser à une étude de fonctions ! Poser pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - f(x)$. Alors pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2$ et $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - x = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2} \geq 0$ car $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^2 \leq 1$. Donc g est croissante sur $[0, 1]$ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur $[0, 1]$.
(d) On sait que la suite u est décroissante, et que $u_0 = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$. De plus avec 5.b), on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. On peut alors appliquer la question précédente en $x = u_n$: $f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2$ d'où $\frac{1}{2}u_n^2 \leq u_n - u_{n+1}$ puis le résultat.
(e) On somme les inégalités obtenues en d) : $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{n-1}^2 + u_n^2 \leq 2(u_0 - u_1) + 2(u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + \dots + 2(u_{n-1} - u_n) + 2(u_n - u_{n+1}) = 2u_0 - 2u_{n+1}$ (somme télescopique) $= 2 - 2u_{n+1} \leq 2$ car $u_{n+1} \geq 0$.