Corrigé du devoir maison 3

Penser à préciser les noms des formules utilisées (quand elles ont un nom) Penser à préciser en dessous de la flèche ou du mot limite, le nom de la variable et vers quoi elle tend

Exercice 1 :

S_1 : ne pas croire que l'on va se ramener au binôme de Newton (il n'y a pas de coefficients binomiaux !). Les puissances doivent vous guider vers la somme géométrique. De plus, n est une constante par rapport à l'indice de sommation, donc comme $3^{n-k} = 3^n \times 3^{-k}$, on obtient $S_1 = 3^n \sum_{k=0}^{n} 3^{-k}(\frac{1}{2})^k = 3^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{3})^k(\frac{1}{2})^k = 3^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{6})^k = 3^n \dfrac{1-(1/6)^{n+1}}{1-1/6}$ car $\frac{1}{6} \neq 1$.

Dans S_2, il manque le $n!$ pour faire apparaître $\binom{n}{k}$ et pouvoir appliquer la formule du binôme de Newton. Comme $n!$ est une constante par rapport à k, on obtient $S_2 = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}5^{k+1} = \frac{5}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}5^k 1^{n-k}$. Il reste encore le problème de la borne de départ. D'après la relation de Chasles, $S_2 = \frac{5}{n!}[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k1^{n-k} - \binom{n}{0}5^0 1^n] = \frac{5}{n!}[(5+1)^n - 1] = \frac{5}{n!}[6^n - 1]$ d'après la formule du binôme.

Exercice 2 :`inspiré d'Edhec E 2003`

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x\,e^x + e^x - e^x = x\,e^x$ du signe de x d'où ses variations : g admet un minimum en 0 de valeur 0 donc est positive sur $\mathbb{R}$.
   Limites : en $-\infty$, d'après les croissances comparées , $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$
   et en $+\infty$, $g(x) = x(e^x - 1) + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. (a) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0 \text{ et } \frac{e^x-1}{x} > 0\}$. Faire un tableau de signe, avec $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ (stricte croissance du ln). Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

   (b) En $+\infty$: $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x\left[1-e^{-x}\right]}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ croissances comparées, donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   En $-\infty$: $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ (pas de F.I.) donc $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
   En $0 \notin \mathcal{D}$: $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$.
   Donc f se prolonge par continuité en 0 (avec la valeur 0).

   (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x-1)}$. Tableau de signe. On trouve que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (En fait, vu le prolongement par continuité, on pourrait ne faire qu'une seule flèche ... après avoir prolongé la fonction).
   On en déduit le signe de f sur $\mathcal{D}$: strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négatif sur $\mathbb{R}_-^*$.

   (d) Pour $x \neq 0$, $f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x x}\right) = \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = f(-x)$.
   Ou partir de $f(x) - x = \ln(\frac{e^x(1-e^{-x})}{x}) - x = \ln(e^x) + \ln(\frac{1-e^{-x}}{x}) - x = \ln(\frac{1-e^{-x}}{x}) = \ln(\frac{e^{-x}-1}{-x}) = f(-x)$.
   Donc pour $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le signe de f et $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   C'est le contraire sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. (a)
   ```
   n=input("entrer un entier n") ; u=input("entrer u_0") ;
   for i=1:n
   u=log((exp(u)-1)/u)
   end
   disp(u)
   ```
   (b) Par récurrence : $u_0 > 0$.
   Soit $n \geq 0$ tel que $u_n > 0$ alors $f(u_n) > 0$ car f strictement positive sur $]0, +\infty[$ donc $u_{n+1} > 0$.
   Ccl : Pour tout entier n, $u_n > 0$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ en appliquant 2.(d) à $x = u_n > 0$ (par a)).
   Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (u_n) est décroissante.

   (d) La suit u est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc.

   (e) Notons ℓ la limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on obtient : $\ell \geq 0$.
   Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$: donc $\ell > 0$. Alors on peut passer à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ puisque f est bien définie et continue en ℓ (attention, si on n'avait pas supposé $\ell \neq 0$, on aurait eu un problème puisque f non définie en 0 donc $f(0)$ n'aurait eu aucun sens !). On obtient l'équation : $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0$. Or dans la question 2.(d), on a obtenu que pour $x > 0$, $f(x) - x < 0$. Donc cette équation ne peut avoir de solution. Contradiction. Donc $\ell = 0$.