Corrigé du devoir maison 5

Exercice 1

- Ex 14. 2. : TV de g : on a g strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$. D'où g bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$: trouvons l'unique antécédent $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$ (car alors $x = g^{-1}(y)$). On résout : $g(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$. On pose $X = e^x > 0$ d'où $X^2 - 2yX - 1 = 0$.
 $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$. Deux racines $X_1 = \frac{2y - \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$.
Or $X_1 \leq 0$, preuve ci-dessous, donc comme on sait qu'il existe une solution (car g bijective), on obtient $X_2 > 0$ (ou montrer que $X_2 > 0$).
D'où $x = \ln(X_2) = \ln(1 + \sqrt{y^2+1})$. On en déduit $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
preuve $X_1 \leq 0$: Remarquer que si $y \leq 0$, c'est évident. Dans le cas $y > 0$, on peut passer par quantité conjuguée. Ou construire : $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$ (que y soit positif ou négatif, cette inégalité est vraie!) d'où le résultat. Ou encore, réaliser (cf chapitre 1) que $\sqrt{y^2+1} > |y| \Leftrightarrow -\sqrt{y^2+1} < y < \sqrt{y^2+1}$ ce qui donne simultanément $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$.
- Ex 17 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe un unique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_2(x, y) = (a, b)$ (car alors f_2 sera bijective, et en regardant cet unique antécédent, on connaîtra f_2^{-1} .)
Or $f_2(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{3} \\ y = \frac{a-2b}{3} \end{cases}$ On a bien trouvé une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ donc f_2 est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et de plus $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $(a, b) \mapsto (\frac{a+b}{3}, \frac{a-2b}{3})$.

Pour ceux qui ont cherché à en faire plus (!) :

Montrons que g est injective : soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$ (*). But : montrer que $y_1 = y_2$.

Comme f est surjective de E dans F , il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $x_2 \in E$ tel que $f(x_2) = y_2$.

Alors (*) implique que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ càd $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Comme $g \circ f$ est injective, on obtient $x_1 = x_2$ ce qui implique $f(x_1) = f(x_2)$ càd $y_1 = y_2$.

Exercice 2

- On introduit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les B_i (resp. N_i) "le i^e tirage donne une blanche (resp. noire)".
- D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. (B_1, N_1) , $P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. En effet, sachant B_1 , au moment du 2e tirage l'urne contient 2 boules blanches et une noire, et le tirage est en situation équiprobable : $P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}$.
- $A_n = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$ et d'après la formule des probabilités composées : $P(A_n) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. En effet, sachant $N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}$, on a rajouté $n-1$ boules noires, donc il y en a n , et toujours une blanche d'où $P_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{n}{n+1}$.
 $C_n = [B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n] \cup [N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n] \cup \dots \cup [N_1 \cap \dots \cap N_{n-1} \cap B_n]$ réunion de n événements deux à deux incompatibles. d'où (formule des probabilités composées appliquée à chaque bloc)
 $P(C_n) = [\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n+1}] + [\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n+1}] + \dots + [\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}] = n \times [\frac{1}{(n(n+1))}] = \frac{1}{n+1}$.
- (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $T_k = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$ et (toujours formule des probabilités composées),
 $P(T_k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.
Ou $T_k = A_{k-1} \cap B_k$ d'où $P(T_k) = P(A_{k-1})P_{A_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{(k-1+1)} \times \frac{1}{k+1}$ car sachant A_{k-1} , on a obtenu $k-1$ noires donc au moment du k^{ie} tirage, l'urne contient 1 blanche et $1 + (k-1) = k$ noires.
- (b) pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ puis $\sum_{k=1}^n P(T_k) + P(A_n) = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + P(A_n) = 1 - \frac{1}{n+1} + P(A_n) = 1$.
On aurait pu obtenir ce résultat sans calcul, en justifiant que $(T_1, \dots, T_n, A_n)$ formait un s.c.e.

Exercice 3

- D'après l'énoncé, la puce part de la case A , donc à l'instant 1, elle se trouve en B ou C avec équiprobabilité : $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{1}{2} = c_1$. Puis, comme il y a 3 cases seulement, (A_n, B_n, C_n) forme un s.c.e. et $a_n + b_n + c_n = 1$.
- Attention** de ne pas confondre les événements et leurs probabilités. Par exemple, sce signifie système complet d'événements, donc concerne des événements pas des probabilités (ici le sce est (A_n, B_n, C_n) et non (a_n, b_n, c_n)). De même une probabilité s'applique à des événements (par exemple $P(a_n)$ n'a aucun sens), donc il est obligatoire de commencer par écrire les relations du cours avec les A_n, B_n, C_n . C'est seulement à la fin, qu'on passe aux $a_n, b_n, c_n \dots$
Bref, d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. (A_n, B_n, C_n) :
 $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = P(A_n) \times 0 + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times \frac{1}{2}$ (équiprobabilité du choix de la case suivante). Et finalement, $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
Dernière remarque : ce n'est pas parce que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ que vous pouvez inventer un nouvel sce et dire que vous appliquez les probas totales à (B_n, C_n) . En effet, (B_n, C_n) , n'est pas un s.c.e! Il faut écrire la formule complète (avec les trois termes), et constater A POSTERIORI qu'un terme est nul ...
- Comme $b_n + c_n = 1 - a_n$, on obtient, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On résout : $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$. Alors la suite u définie par $u_n = a_n - \frac{1}{3}$ est géométrique de raison $(\frac{1}{2})$: pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}u_1$ avec $u_1 = a_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$. Finalement, pour $n \geq 1$, $a_n = u_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$, puisque $|\frac{1}{2}| < 1$. Ce n'est pas une surprise vu le choix équiprobable à chaque instant !