Corrigé du mini-devoir maison 6

1. Poser f définie sur $\mathbb{R}^-$ par $f(x) = e^x - 3 - 2x$. T.V. : f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc (th. de la bijection) f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)[= [-2, +\infty[$. Or $0 \in [-2, +\infty[$ donc (déf. de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}^-$. $f(-2) = 1 + \frac{1}{e^2} \geq 0$ et $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \leq 0$ donc $f(-1) \leq f(\alpha) \leq f(-2)$ et par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}^-$, $-1 \geq \alpha \geq -2$.
2. a) Soit $x \in \mathbb{R}^-$; $g(x) = x \Leftrightarrow e^x - 3 = 2x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ par 1. Donc α unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^-$.
   b) méthode 1 : Faire le tableau de variations de g : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x/2 > 0$.
   On trouve que $g(]-\infty, 0]) =]-3/2, -1] \subset]-\infty, 0]$ donc $\forall x \in]-\infty, 0]$, $g(x) \in]-\infty, 0]$.
   méthode 2 : construction $x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq e^x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq e^x - 3 \leq -2 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq g(x) \leq -1 \Rightarrow g(x) \leq 0$ ...
   De plus $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq e^0 = 1 \Rightarrow e^x/2 < \frac{1}{2}$. Et $g'(x) \geq 0$ donc pour $x \leq 0$, $|g'(x)| = g'(x) \leq \frac{1}{2}$.
3. (a) Récurrence : supposons $u_n \leq 0$, alors $u_n \in]-\infty, 0]$, et par 2.b) $u_{n+1} = g(u_n) \in]-\infty, 0]$ d'où $u_{n+1} \leq 0$.
   (ou utiliser la monotonie de g pour construire l'inégalité sur u_{n+1} ... mais moins dans l'esprit de l'énoncé).

   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^-$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, donc on peut appliquer l'IAF à g aux points $u_n \in \mathbb{R}^-$ et $\alpha \in \mathbb{R}^-$: $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ car $g(\alpha) = \alpha$ d'après 2.a)
   Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
   initialisation : Attention, l'initialisation est difficile ici, donc bien tout justifier ! $|u_0 - \alpha| = |-1 - \alpha|$.
   Or $-2 \leq \alpha \leq -1 \Rightarrow 2 \geq -\alpha \geq 1 \Rightarrow -1 + 2 \geq -1 - \alpha \geq -1 + 1 \Rightarrow 1 \geq -1 - \alpha \geq 0 \Rightarrow |-1 - \alpha| \leq 1$.
   D'où $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \frac{1}{2^0}$. *hérédité* : supposons $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Or $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (par ce qui précède) $\leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$ (H.R.) $= \frac{1}{2^{n+1}}$. *Conclure.*

   (c) Théorème d'encadrement : $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $2 > 1$) donc $u_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$....

   (d) Comme (u_n) converge vers α, si n est suffisamment grand, u_n donnera une bonne valeur approchée de α.
   On cherche donc n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-9}$: pour cela, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$ car alors $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$.
   Puis $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow 10^9 \leq 2^n \Leftrightarrow \ln(10^9) \leq \ln(2^n)$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 9\ln(10) \leq n\ln(2)$
   $\Leftrightarrow \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \leq n$ (car $\ln(2) > 0$). Le premier n qui convient est $n_0 = \lfloor \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \rfloor + 1$.
   Il reste à écrire un programme qui calcule n_0 puis renvoie u_{n_0} : `u=-1 , n=floor[9*log(10)/log(2)]+1`
   `for k=1:n, u=(exp(u)-3)/2 , end, disp(u).`
   Variante avec while : `n=0;u=1;`
   `while (1/2)^n>10^(-9), n=n+1, u=(exp(u)-3)/2, end, disp(u)`

Corrigé du mini-devoir maison 6

1. Poser f définie sur $\mathbb{R}^-$ par $f(x) = e^x - 3 - 2x$. T.V. : f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc (th. de la bijection) f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)[= [-2, +\infty[$. Or $0 \in [-2, +\infty[$ donc (déf. de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}^-$. $f(-2) = 1 + \frac{1}{e^2} \geq 0$ et $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \leq 0$ donc $f(-1) \leq f(\alpha) \leq f(-2)$ et par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}^-$, $-1 \geq \alpha \geq -2$.
2. a) Soit $x \in \mathbb{R}^-$; $g(x) = x \Leftrightarrow e^x - 3 = 2x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ par 1. Donc α unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^-$.
   b) méthode 1 : Faire le tableau de variations de g : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x/2 > 0$.
   On trouve que $g(]-\infty, 0]) =]-3/2, -1] \subset]-\infty, 0]$ donc $\forall x \in]-\infty, 0]$, $g(x) \in]-\infty, 0]$.
   méthode 2 : construction $x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq e^x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq e^x - 3 \leq -2 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq g(x) \leq -1 \Rightarrow g(x) \leq 0$ ...
   De plus $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq e^0 = 1 \Rightarrow e^x/2 < \frac{1}{2}$. Et $g'(x) \geq 0$ donc pour $x \leq 0$, $|g'(x)| = g'(x) \leq \frac{1}{2}$.
3. (a) Récurrence : supposons $u_n \leq 0$, alors $u_n \in]-\infty, 0]$, et par 2.b) $u_{n+1} = g(u_n) \in]-\infty, 0]$ d'où $u_{n+1} \leq 0$.
   (ou utiliser la monotonie de g pour construire l'inégalité sur u_{n+1} ... mais moins dans l'esprit de l'énoncé).

   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^-$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, donc on peut appliquer l'IAF à g aux points $u_n \in \mathbb{R}^-$ et $\alpha \in \mathbb{R}^-$: $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ car $g(\alpha) = \alpha$ d'après 2.a)
   Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
   initialisation : Attention, l'initialisation est difficile ici, donc bien tout justifier ! $|u_0 - \alpha| = |-1 - \alpha|$.
   Or $-2 \leq \alpha \leq -1 \Rightarrow 2 \geq -\alpha \geq 1 \Rightarrow -1 + 2 \geq -1 - \alpha \geq -1 + 1 \Rightarrow 1 \geq -1 - \alpha \geq 0 \Rightarrow |-1 - \alpha| \leq 1$.
   D'où $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \frac{1}{2^0}$. *hérédité* : supposons $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Or $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (par ce qui précède) $\leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$ (H.R.) $= \frac{1}{2^{n+1}}$. *Conclure.*

   (c) Théorème d'encadrement : $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $2 > 1$) donc $u_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$....

   (d) Comme (u_n) converge vers α, si n est suffisamment grand, u_n donnera une bonne valeur approchée de α.
   On cherche donc n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-9}$: pour cela, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$ car alors $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$.
   Puis $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow 10^9 \leq 2^n \Leftrightarrow \ln(10^9) \leq \ln(2^n)$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 9\ln(10) \leq n\ln(2)$
   $\Leftrightarrow \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \leq n$ (car $\ln(2) > 0$). Le premier n qui convient est $n_0 = \lfloor \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \rfloor + 1$.
   Il reste à écrire un programme qui calcule n_0 puis renvoie u_{n_0} : `u=-1 , n=floor[9*log(10)/log(2)]+1`
   `for k=1:n, u=(exp(u)-3)/2 , end, disp(u).`
   Variante avec while : `n=0;u=1;`
   `while (1/2)^n>10^(-9), n=n+1, u=(exp(u)-3)/2, end, disp(u)`