Corrigé du devoir maison 9

Exercice 1 : `début edhec 2009`

1. Pour tout $t \in [0,x] \subset [0,1[$, $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.

2. On intègre sur $[0,x]$: $\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} dt$ d'où par linéarité : $\sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1} dt = -\int_0^x \frac{-1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ càd $\sum_{p=1}^{n} [\frac{t^p}{p}]_0^x = -[\ln|1-t|]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ d'où le résultat : $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

3. Par encadrement : pour tout $t \in [0,x]$, $t \leq x$ donc $1-t \geq 1-x \geq 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ et $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$ (car $t^n \geq 0$). Par intégration ($0 \leq x$), $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} [\frac{1}{n+1} t^{n+1}]_0^x = \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1}$ puisque $x < 1$. Conclure avec le théorème d'encadrement (quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1} \to 0$).

4. En passant à la limite dans l'égalité du 2), obtient $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x) \in \mathbb{R}$. Par définition, la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ converge donc et la valeur de sa somme est : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$

5. $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc comme les séries de terme général $\frac{x^n}{n}$ et $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^p}{p}$ (avec $p = n+1$) convergent d'après la question 4., par linéarité la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge. De plus,
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x\ln(1-x) - \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -x\ln(1-x) - (\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} - \frac{x^1}{1})$
$= -x\ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Exercice 2 : `Agro Véto 2016`

1. pour tout $n \geqslant 3$, on a : $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geq 0$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge. Comme la série est à termes positifs, (on en déduit donc que (S_n) est croissante (et divergente)), $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (cf cours si besoin).

2. (a) Par quotient, φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\varphi'(t) = ... = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$ donc $\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln(t) < 1 \Leftrightarrow t < e$. Limites : en 0, pas de F.i. $\varphi(t) \to -\infty$, et en $+\infty$, d'après les croissances comparées, $\varphi(t) \to 0$.
(b) Soit $k \geq 4$, alors par décroissance de φ sur $[k,k+1]$, $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ et par intégration : $\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx = \frac{\ln k}{k} [x]_k^{k+1} = \frac{\ln(k)}{k}$. De même pour l'autre côté, en regardant sur $[k-1,k] \subset [e,+\infty[$ où φ est décroissante : $k-1 \leq x \leq k \Rightarrow \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(x)}{x}$ d'où par intégration $\frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x} dx$.
(c) En sommant les inégalités du (b) pour k variant de 4 à n (avec $n \geq 4$) :
$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x} dx$ d'où [relation de Chasles] $\int_4^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq S_n - \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx$ $(*)$.
Or $\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx = \int_3^n \frac{1}{x} \ln x dx = [\frac{1}{2}\ln^2(x)]_3^n = \frac{1}{2}(\ln^2(n) - \ln(3))$ et de même pour l'autre côté.
Finalement, $\frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln(4) \leq S_n - S_3 \leq \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln(3)$
donc $A = -\frac{1}{2}\ln(4)$, $B = S_3$ et $C = -\frac{1}{2}\ln(3)$ conviennent.
(d) Pour $n \geq 4$, on divise l'encadrement obtenu en (c) par $\frac{\ln^2(n)}{2}$: $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2A-2B}{\ln^2(n)} \leq \frac{S_n}{\frac{\ln^2(n)}{2}} - \frac{2B}{\ln^2(n)} \leq 1 - \frac{2C-2B}{\ln^2(n)}$.
On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2A-2B}{\ln^2(n)} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2C-2B}{\ln^2(n)}$ et $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^2 = \left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^2 = \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Théorème d'encadrement : $\frac{S_n}{\frac{\ln^2(n)}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où le résultat.

3. (a) après calcul des intégrales dans 2.(b), pour $k \geq 4$, on a obtenu :
$\frac{1}{2}[\ln^2(k+1) - \ln^2(k)] \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{1}{2}[\ln^2(k) - \ln^2(k-1)]$ $(**)$.
Or pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{2}(\ln^2(n) - \ln^2(n+1)) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2(n)) \leq 0$ dès que $n+1 \geq 4$. (utiliser le côté droit de $(**)$, en $k = n+1$).Donc la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
(b) Il reste à minorer la suite (u_n) (au moins à partir d'un certain rang) : or d'après 2.(c) pour $n \geq 4$,
$u_n \geq \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(n) - A + B \geq 0 - A + B$ par croissance du ln (puisque $\ln(n+1) \geq \ln(n)$).
La suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est minorée par $B - A$, et décroissante, donc converge. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.