Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}$.
2. (a) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n$.
 (b) En déduire que la série $\sum_n \binom{n}{r} x^n$ est convergente.
3. Pour tout entier naturel r , on pose : $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$
 - (a) Donner la valeur de S_0 .
 - (b) Etablir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.
 - (c) En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, \forall r \in \mathbb{N}, S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.
 - (d) Donner enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0, 1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X , Y et G sont des variables aléatoires réelles définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Donner la loi de X . (On pourra noter D_k l'événement "Le joueur ne joue pas la k ème manche").
 (b) On pose $T = X + 1$. Reconnaitre la loi de T .
 (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser leur valeur.
 (d) Compléter le programme suivant afin que soit affichée la valeur prise par X .

```

a=input('entrer alpha')
x=....
r=rand()
while ....
....
....
end
disp(x)

```
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=n)}(Y = k)$ (on pensera à distinguer deux cas pour k).
 (b) Que deviennent ces probabilités lorsque $n = 0$?
 (c) A l'aide de la formule des probabilités totales et de la *partie 1*, en déduire que :
 pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \beta^k(1 - \beta)$ avec $\beta = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha + p - \alpha p}$.
3. Calculer l'espérance de Y .
4. (a) Exprimer G en fonction de X et Y .
 (b) En déduire l'espérance de G .
5. Compléter le programme de la question 1.(d) afin de simuler toute l'expérience.
 Faire afficher les valeurs de X , Y et G .