Devoir à la maison 11 à rendre le lundi 30 avril 2018

Option plus facile : exercice 1, exercice 2 questions 1. et 2., puis exercice 3 questions 1 à 5 ;
Option plus difficile : exercice 2 et exercice 3

Exercice 1:

Attention, si vous avez des difficultés avec le n, vous pouvez commencer par poser $n = 3$!
Essayez ensuite de voir comment généraliser votre raisonnement à n, quelconque fixé.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus n. Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associé le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) + XP'(X)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_2 unitaire de degré 2 tel que : $f(P_2) = 3P_2$.
3. Déterminer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré de $f(X^k)$.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (choisir la méthode la plus courte !).

Exercice 2:

On note E l'espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Soit F l'ensemble des éléments f de E tels que : $f'' - 3f' + 2f = 0$
Soit F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant en outre la relation $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. *On admettra qu'il en est de même pour* F_0.
2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations : $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$
   (a) Montrer que f_1 et f_2 sont des éléments de F.
   (b) Montrer alors que la famille (f_1, f_2) est libre.
3. Soit f un élément de F.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_1, a_2) de nombres réels tel que la fonction $h_{a_1,a_2} = f - a_1 f_1 - a_2 f_2$ appartienne à F_0.
   (b) Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x))$ et $g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x))$. Montrer que ces fonctions sont constantes.
   (c) En appliquant la question 3.(b), montrer que si f appartient à F_0, alors $f = 0$.
   (d) Déduire alors du (a) que (f_1, f_2) est une base de F. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit Φ l'application de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par la relation : $\Phi(f) = (f(0), f'(0))$.
   Montrer que Φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3:

1. Vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, et que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ converge.
   On note $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$.
3. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$. En déduire : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
4. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Soit $0 < x \leq y$. Montrer que $f(x) \geq f(y)$. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. *bonus :* Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$.
   (On pourra écrire $\frac{1}{x}$ sous la forme d'une intégrale).
   En déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
7. Soit $(x, h) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ converge.
   (b) Établir : $\forall t \in [0;+\infty[,\quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.
   (c) En déduire : $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.
8. En déduire que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$