

Devoir à la maison 12

à rendre au plus tard le lundi 4 juin

Exercice 1: Edhec E 2018

Soit a un réel strictement positif, et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

- Montrer que la fonction f est une densité.
Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \frac{X^2}{2a}$.
 - Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
 - On rappelle qu'en scilab, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . Ecrire un script Scilab, demandant la valeur de a à l'utilisateur, et permettant de simuler la variable X .

Exercice 2: extrait Edhec S 2018 (sujet initialement prévu)

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

- Etudier la parité de f .
- Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X .
- Montrer que X possède une espérance, et donner sa valeur.
- On note F la fonction de répartition de X . Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
- On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.
 - Déterminer la loi de Y .
 - Vérifier que Y est bien une variable à densité. Préciser son espérance.
 - Bonus* : déterminer explicitement F , puis F^{-1} .
En déduire alors une syntaxe Scilab permettant de simuler la variable X .

Devoir à la maison 12

à rendre au plus tard le lundi 4 juin

Exercice 3: Edhec E 2018

Soit a un réel strictement positif, et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

- Montrer que la fonction f est une densité.
Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \frac{X^2}{2a}$.
 - Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
 - On rappelle qu'en scilab, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . Ecrire un script Scilab, demandant la valeur de a à l'utilisateur, et permettant de simuler la variable X .

Exercice 4: extrait Edhec S 2018 (sujet initialement prévu)

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

- Etudier la parité de f .
- Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X .
- Montrer que X possède une espérance, et donner sa valeur.
- On note F la fonction de répartition de X . Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
- On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.
 - Déterminer la loi de Y .
 - Vérifier que Y est bien une variable à densité. Préciser son espérance.
 - Bonus* : déterminer explicitement F , puis F^{-1} .
En déduire alors une syntaxe Scilab permettant de simuler la variable X .